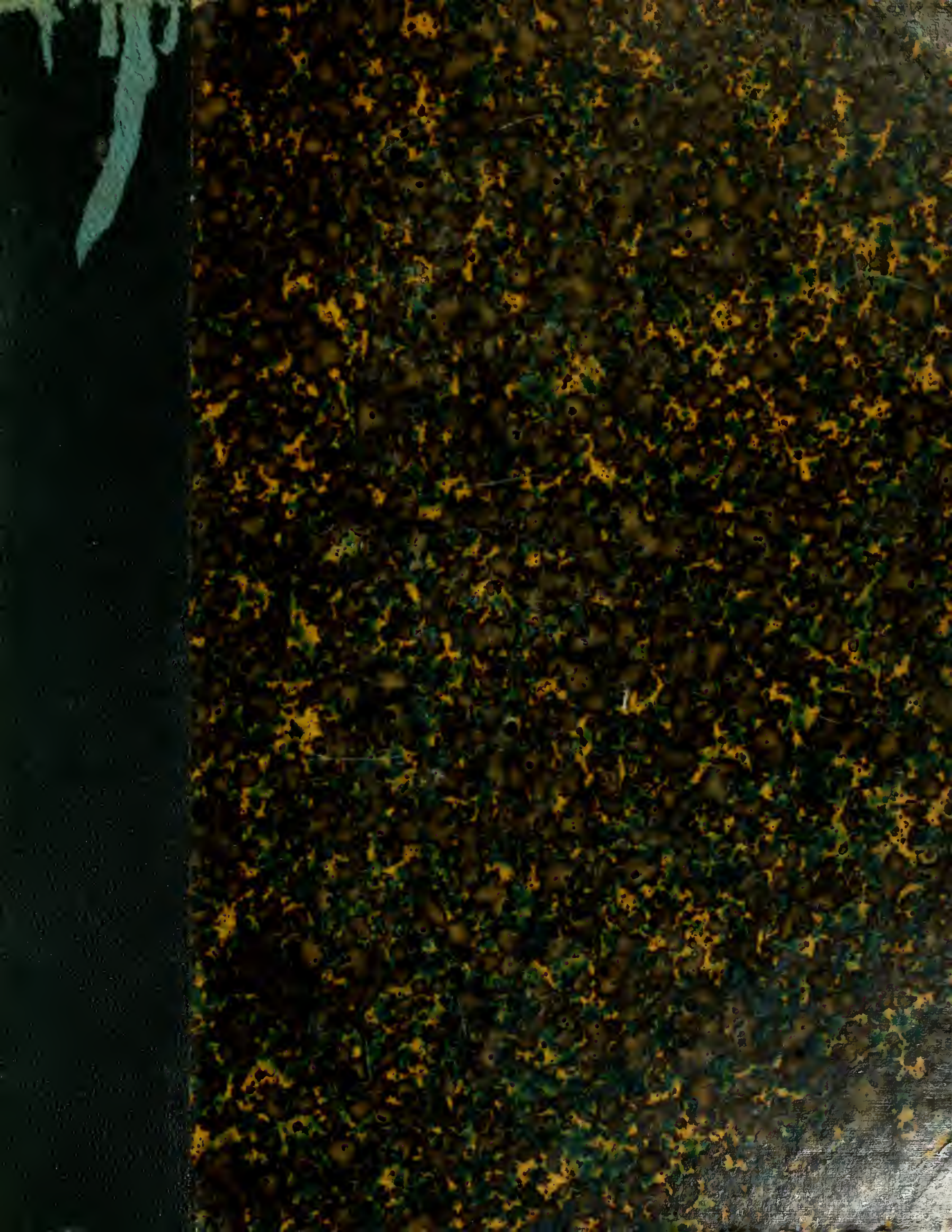
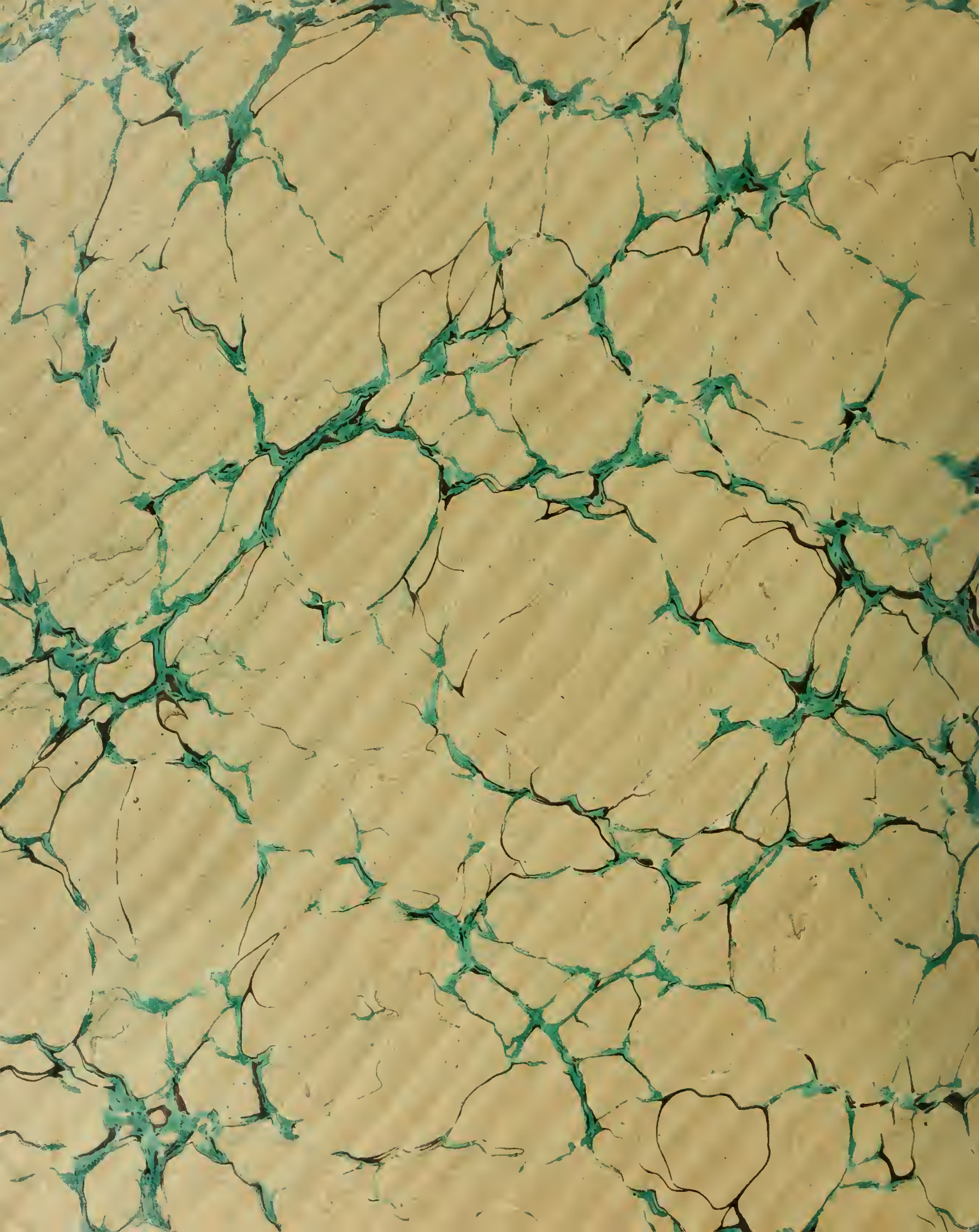
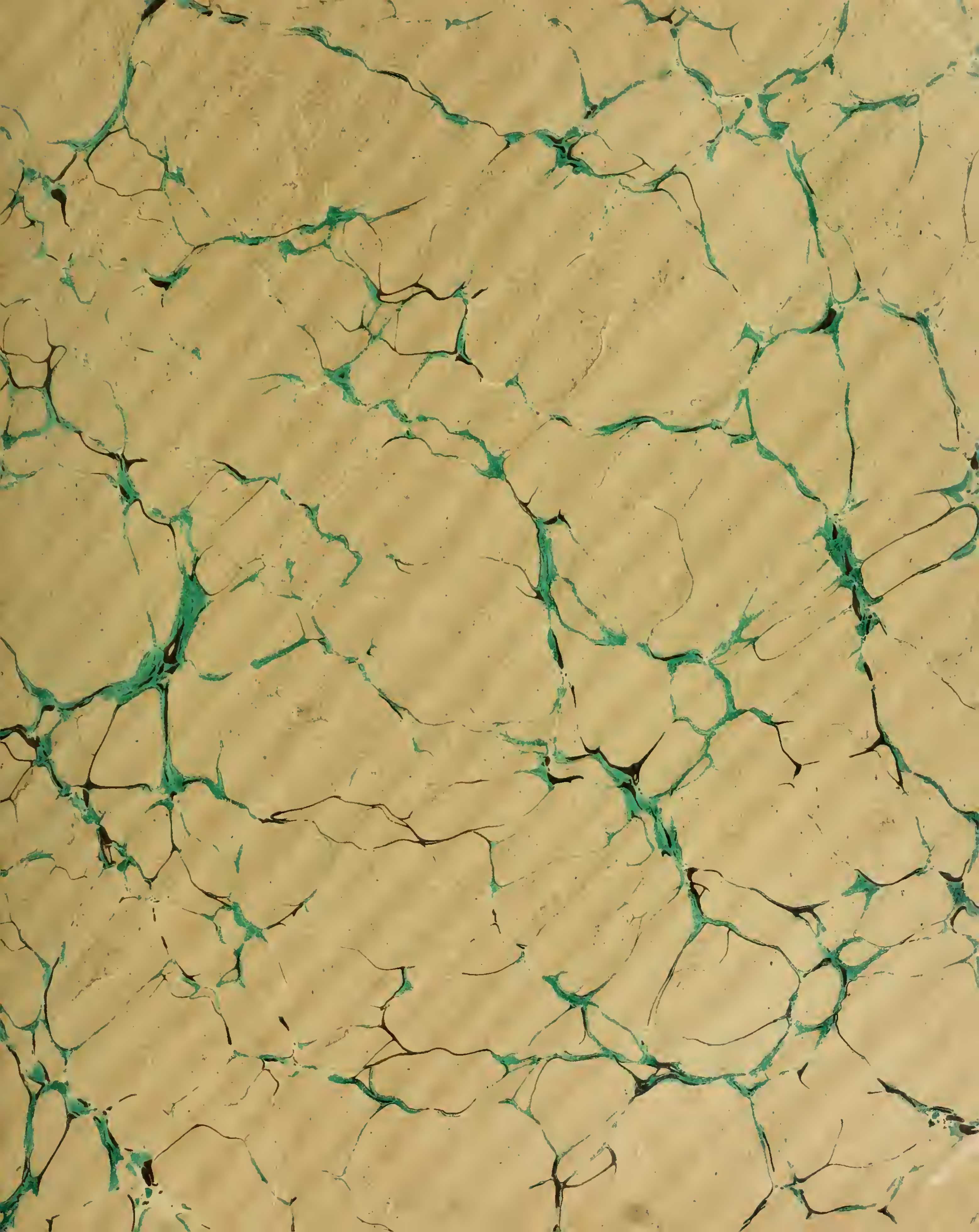






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XVI. — ANNÉE 1871.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1871

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XVI.

ERRATA DU TOME XV.

Page 321, équation (6), ajoutez dt en facteur aux valeurs de dc, dc' et dc''.

Page 323, 1^re^ et 2^e^ équation (8) *au lieu de* $d\varphi$, *lisez* $d\theta$.

Page 332, ligne 19, *au lieu de* ne pas laisser, *lisez* ne laisser.

Page 339, ligne 5 en remontant, *au lieu de* (4), *lisez* (44).

Page 342, ligne 2 en remontant, *au lieu de* determinées, *lisez* indeterminées.

Page 343, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $\lambda = z$, *lisez* $z = \lambda$.

Page 366, ligne 2 en remontant, *au lieu de :* Le double signe qui précède l'unité dans cette formule, est relatif, *lisez :* Le double signe, dans cette formule, est relatif.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur la résolution des équations algébriques les unes par les autres;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

1. D'après la théorie des substitutions, on doit considérer toutes les équations dont le groupe est contenu dans un groupe donné T comme constituant un *type* caractérisé par ce groupe.

Les divers groupes t, t',... contenus dans le groupe T caractériseront autant de types particuliers, contenus dans le type plus général T.

Cela posé, l'une des questions les plus générales que l'on puisse se proposer sur les équations sera la suivante :

PROBLÈME. — *Déterminer les types les plus généraux d'équations irréductibles dont la résolution équivaut à celle d'équations auxiliaires appartenant à un type donné* T (*ou à certains types donnés* T, T',...).

En spécifiant le choix des types T, T',..., ce problème général donnera lieu à une infinité de questions particulières. On peut supposer, par exemple :

1° Que le degré des équations auxiliaires ne surpasse pas une limite donnée m;

2° Que leur ordre ne surpasse pas une limite donnée n;

3° Qu'aucun des facteurs premiers qui divisent cet ordre ne surpasse un nombre donné p;

4° Que chacun de leurs facteurs de composition soit un produit de facteurs premiers dont le nombre ne surpasse pas une limite donnée q. (Si $q = 1$, on aura le problème de la résolution par radicaux, dont nous avons donné ailleurs la solution.)

Etc.

Chacune de ces questions exige naturellement, pour être résolue, des considérations spéciales. On peut néanmoins établir certains théorèmes généraux, applicables à tous les cas, et qui resserrent notablement le problème. Ce sera l'objet du présent Mémoire.

Réduction du problème au cas des équations primitives.

2. Nous appellerons, pour abréger, *équations résolubles* celles dont la résolution équivaut à celle d'équations auxiliaires appartenant aux types donnés T, T′, ...; *groupes résolubles* ceux qui caractérisent ces équations.

3. Lemme. — *Si une équation* X, *ayant pour groupe* G, *est résoluble, toute équation* Y, *dont le groupe* H *est contenu dans* G, *ou isomorphe à* G, *le sera également.*

Supposons d'abord que H soit contenu dans G. Soient E, E′, ... les équations auxiliaires dont la résolution équivaut à celle de X; leurs racines seront, par définition, des fonctions rationnelles de celles de X, et, en les adjoignant à cette dernière équation, on réduira son groupe à celles de ses substitutions qui laissent ces fonctions invariables (*voir* notre *Traité des Substitutions*, n° 362). Mais cette adjonction résout l'équation; donc G, et *à fortiori* H, ne contient aucune substitution qui laisse ces fonctions invariables, sauf la substitution 1. Cela posé, considérons les fonctions analogues aux précédentes, formées avec les racines de Y. Les équations e, e', ... dont elles dépendent, ayant évidemment leurs groupes contenus dans ceux des équations E, E′..., appartiendront aux types T, T′.... D'autre

part, il est clair que leur adjonction résoudra Y, en réduisant son groupe à la substitution 1.

Supposons, en second lieu, que H soit isomorphe à G. Soit I le groupe formé par celles des substitutions de G auxquelles correspond dans H la substitution 1. Une fonction φ des racines de X, invariable par les substitutions de I et variable par toute autre substitution, dépendra d'une équation Z, dont le groupe K sera isomorphe à H sans mériédrie. On pourra donc déterminer une fonction rationnelle des racines de Z, qui ait pour groupe H (*Traité des Substitutions*, n^{os} 69-75). L'équation U, dont dépend cette fonction, sera résolue par les équations E, E′,..., qui résolvent X; car ses racines sont des fonctions rationnelles de celles de X. L'équation Y, ayant le même groupe, sera résoluble par des équations appartenant aux mêmes types.

4. Soient maintenant X une équation résoluble, irréductible, mais non primitive; m le nombre des systèmes $x_1, y_1, \ldots; \ldots; x_m, y_m, \ldots$ entre lesquels se partagent ses racines; n le nombre des racines de chacun d'eux; G le groupe de X. Les substitutions de G seront, par définition, de la forme

$$U = RS_1 \ldots S_m, \quad U' = R'S'_1 \ldots S'_m, \ldots,$$

R, R′,... étant des substitutions qui permutent les systèmes entre eux, en remplaçant les unes par les autres les racines correspondantes, et S_α, S'_α,... des substitutions qui permutent entre elles les racines du $\alpha^{\text{ième}}$ système, sans déplacer les autres. L'équation X étant irréductible, les substitutions de G permuteront transitivement les racines, et *à fortiori* les systèmes. On pourra d'ailleurs supposer que $x_\rho, y_\rho, \ldots$ représentent respectivement celles des racines du $\rho^{\text{ième}}$ système qui succèdent à $x_1, y_1, \ldots$ en vertu de l'une A_ρ des substitutions qui remplacent le premier système par le $\rho^{\text{ième}}$.

Cela posé, le groupe H_α formé par celles des substitutions de G qui ne déplacent pas le $\alpha^{\text{ième}}$ système, étant contenu dans G, sera résoluble (3). Le groupe Γ_α formé par les déplacements que ces substitutions font subir aux racines $x_\alpha, y_\alpha, \ldots$, étant isomorphe à H_α, sera

également résoluble (3). Il contient d'ailleurs chacune des substitutions S_α, S'_α, ... En effet, supposons que U fasse succéder le système α au système β. La substitution $A_\alpha^{-1}A_\beta U$ appartient à H_α, et fait subir aux racines du $\alpha^{ième}$ système le déplacement S_α.

D'autre part, G étant résoluble, le groupe $\Delta = (R, R', \ldots)$, qui lui est isomorphe, sera résoluble. Enfin chacune des substitutions de Δ permute les uns dans les autres les groupes Γ_α, Γ_β, ... En effet, la substitution $U = RS_1 \ldots S_m$, remplaçant le système β par le système α, transformera H_β en H_α, et Γ_β en Γ_α; mais $S_1, \ldots, S_m$ sont évidemment permutables à Γ_α; donc R transforme Γ_β en Γ_α. C. Q. F. D.

Cela posé, le groupe dérivé de la combinaison des groupes Δ, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ (ou, plus simplement, de Δ et de Γ_1, puisque $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ sont les transformés de Γ_1 par les substitutions de Δ) sera évidemment résoluble. Il contient d'ailleurs toutes les substitutions de G. Il se confondra donc avec G; sinon il caractériserait un type résoluble, plus général que le proposé, lequel ne satisferait plus à l'énoncé du problème.

On a donc cette proposition :

Théorème I — *La construction des groupes résolubles, mais non primitifs, les plus généraux de degré* $M = mn$ *se ramène à la construction de deux groupes résolubles partiels, dont l'un* Δ *permute les* m *systèmes en remplaçant les unes par les autres les racines correspondantes, l'autre* Γ_1 *ne déplaçant que les racines du premier système, qu'il permute exclusivement entre elles.*

5. Réciproquement, étant donné deux groupes résolubles Δ et Γ_1, de degrés m et n, on pourra évidemment déduire de leur combinaison un groupe résoluble non primitif G de degré mn. Pour que G soit général, il faut évidemment que Δ et Γ_1 le soient également, chacun dans son espèce.

Si l'un des deux groupes Δ et Γ_1 n'est pas primitif, on ramenera de même sa construction à celle de deux groupes partiels; continuant ainsi, on pourra énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *La construction des groupes résolubles, mais non primitifs, les plus généraux de degré* M, *se ramène à la construction*

des groupes résolubles et primitifs les plus généraux ayant pour degrés les diviseurs de M.

Réduction du problème au cas des groupes primitifs et indécomposables.

6. Une équation X de degré n^m est dite *décomposable* lorsque, en caractérisant ses racines par m indices, $x_1, \ldots, x_m$, variables de 0 à $n-1$, les substitutions de son groupe G se réduisent toutes à la forme

$$U = | x_r \quad \varphi_r[x_{f(r)}] |,$$

remplaçant ainsi chaque indice par une fonction d'un seul indice.

On aura évidemment $U = RS_1 \ldots S_m$, R étant la substitution qui remplace en général x_r par $x_{f(r)}$, et S_α la substitution qui remplace x_α par $\varphi_\alpha(x_\alpha)$ sans altérer les autres indices.

Soient donc $U = RS_1 \ldots S_m$, $U' = R'S'_1 \ldots S'_m, \ldots$ les substitutions de G. Les substitutions partielles R, R',..., considérées isolément, permuteront transitivement les indices $x_1, \ldots, x_m$, si G est primitif, comme nous devons maintenant le supposer. En effet, si ces substitutions ne permutaient x_1 qu'avec les indices $x_1, \ldots, x_\alpha$, on pourrait répartir les racines en systèmes d'après les valeurs de ces indices, et chaque substitution de G remplacerait les racines de chaque système par celles d'un même système; donc G ne serait pas primitif.

On peut d'ailleurs supposer que, parmi celles des substitutions de G qui remplacent x_1 par des fonctions de x_ρ, il y en ait une, A_ρ, qui le remplace simplement par x_ρ; car, si A_ρ remplaçait x_1 par $\varphi_1(x_\rho)$, il suffirait, pour obtenir le résultat voulu, de prendre pour indice indépendant, à la place de x_ρ, l'expression $\varphi_1(x_\rho)$.

Cela posé, le groupe H_α, formé par celles des substitutions de G qui remplacent x_α par une fonction de x_α, étant contenu dans G, sera résoluble. Le groupe Γ_α, formé par les substitutions qui altèrent x_α de la même manière que celles de H_α, mais n'altèrent pas les autres indices, étant isomorphe à H_α, sera résoluble (5). Il contient d'ailleurs chacune des substitutions S_α, $S'_\alpha, \ldots$. En effet, soit, pour abréger, $f(\alpha) = \beta$. La substitution $A_\alpha A_\beta^{-1} U$ appartient à H_α, et fait subir à x_α l'altération S_α.

D'autre part, G étant résoluble, le groupe $\Delta = (R, R', \ldots)$, qui lui est isomorphe, sera résoluble. Enfin chacune des substitutions de Δ permute les uns dans les autres les groupes Γ_α, Γ_β, ... En effet, la substitution U, remplaçant x_α par une fonction de x_β, transformera évidemment H_β en H_α, et Γ_β en Γ_α; mais $S_1, \ldots, S_m$ sont évidemment permutables à Γ_α; donc R transforme Γ_β en Γ_α. C. Q. F. D.

Cela posé, le groupe dérivé de la combinaison des groupes Δ, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ (ou, plus simplement, de Δ et de Γ_1) sera évidemment résoluble, et contiendra G. Ce dernier groupe étant supposé aussi général que possible, il se confondra avec lui.

On a donc cette proposition :

Théorème. — *La construction des groupes résolubles, primitifs mais décomposables les plus généraux de degré n^m, se ramène à la construction de deux groupes résolubles partiels, dont l'un Δ permute les m indices entre eux, l'autre Γ_1 laissant tous les indices invariables, sauf le premier, x_1, que ses substitutions remplacent par des fonctions de x_1.*

7. La question de construire les deux groupes Δ et Γ_1 revient évidemment à résoudre le problème initial pour les degrés m et n. Réciproquement, ces groupes une fois construits d'une manière quelconque, on obtiendra évidemment, par leur combinaison, un groupe G résoluble et décomposable de degré n^m. Pour que G soit primitif, il faudra que Δ soit transitif, et Γ_1 primitif (*Traité*, n° 311). Pour qu'il soit général, il faudra en outre que Δ et Γ_1 le soient également, chacun dans son espèce.

Si Γ_1 était décomposable, on ramènerait de nouveau sa construction à celle de deux groupes partiels Δ' et Γ'_1, et ainsi de suite. Supposons, pour fixer les idées, que Γ'_1 soit indécomposable. La question de construire les groupes Δ, Δ' revient au problème initial, mais avec un degré fort abaissé. La solution de ce problème serait donc complète si l'on savait construire, pour chaque degré, les groupes résolubles primitifs et indécomposables les plus généraux, tels que Γ'_1.

Cas des groupes primitifs et indécomposables

8. Théorème. — *Soient* G *un groupe quelconque;* G, H, I,..., K, 1 *une série de groupes tels, que chacun d'eux soit contenu dans le précédent et permutable aux substitutions de* G, *mais ne soit contenu dans aucun autre groupe plus général jouissant de cette double propriété. L'un quelconque de ces groupes, tel que* H, *résultera de la combinaison d'un ou plusieurs groupes partiels* $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$ *ayant tous le même ordre, et jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Les substitutions communes aux deux groupes*

$$\mathfrak{H}_\alpha \quad et \quad (\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_{\alpha-1}, \mathfrak{H}_{\alpha+1}, \ldots)$$

seront celles du groupe I, *qui succède à* H *dans la suite* G, H, I,..., K, 1;

2° *Les substitutions de* $\mathfrak{H}_\alpha$ *sont échangeables à celles de* $\mathfrak{H}_\beta$ *aux substitutions près de* I, *si* $\alpha \gtrless \beta$;

3° *Chacun des groupes* $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$ *se réduit à* I *par la suppression d'un de ses facteurs de composition.*

Soit H_1 un groupe qui soit plus général que I, contenu dans H et permutable à ses substitutions, et qui ne contienne aucun autre groupe jouissant des mêmes propriétés. Soient $H_1, H_2, \ldots$ les groupes transformés de H_1 par les substitutions de G. Ces substitutions étant permutables à H, qui contient H_1, le groupe $(H_1, H_2, \ldots)$ sera contenu dans H. Il est d'ailleurs plus général que I; enfin il est permutable aux substitutions de G (car, si une substitution t de G transforme H_α en H', en la combinant avec la substitution s qui transforme H_1 en H_α, on obtient une substitution st, appartenant à G, et qui transforme H_1 en H'; donc H' est un des groupes de la suite $H_1, H_2 \ldots$). Or il n'existe, par hypothèse, aucun groupe intermédiaire entre H et I qui jouisse de ces propriétés. On aura donc $H = (H_1, H_2, \ldots)$.

Si quelques-uns des groupes $H_1, H_2, \ldots$ sont dérivés de la combinaison des autres, on pourra les effacer. Soient $H_\alpha, H_\beta, \ldots$ les groupes restants; on aura plus simplement $H = (H_\alpha, H_\beta, \ldots)$.

Le groupe H_1 contenant I, auquel les substitutions de G sont per-

mutables, ses transformés H_α, H_β, .. et par suite chacun des deux groupes H_α, $(H_\beta, \ldots)$ contiendront I, qui est son propre transformé. Mais ces deux groupes n'auront aucune autre substitution commune. En effet, soit g_α la substitution de G qui transforme H_1 en H_α; H_α sera permutable aux substitutions du groupe transformé de H par g_α, lequel n'est autre que H. On voit de même que les substitutions de H sont permutables à chacun des groupes $H_\beta, \ldots$; elles le seront donc au groupe J_α formé des substitutions communes à H_α et à $(H_\beta, \ldots)$. Mais H_α n'est pas contenu dans $(H_\beta, \ldots)$, sans quoi on l'aurait effacé; donc J_α sera moins général que H_α, quoique contenant I et permutable aux substitutions de H; son transformé J_1 par la substitution s^{-1} sera moins général que H_1, contiendra I qui est son propre transformé, et sera permutable aux substitutions de H. Mais il n'existe, par hypothèse, aucun groupe intermédiaire entre H_1 et I qui jouisse de ces propriétés; donc J_1, et par suite J_α, se réduit à I.

Enfin, les substitutions de H_α sont échangeables aux I près à celles de chacun des groupes $H_1, H_2, \ldots, H_{\alpha-1}, \ldots, H_{\alpha+1}, \ldots$. Soient, en effet, h_α, h_β deux substitutions prises respectivement dans H_α et H_β; la substitution $h_\alpha^{-1}.h_\beta^{-1}h_\alpha h_\beta = h_\alpha^{-1}h_\beta^{-1}h_\alpha.h_\beta$ appartiendra à H_α, auquel h_β est permutable, et à H_β, auquel h_α est permutable. Elle appartiendra donc au groupe I, formé par les substitutions communes à ces deux groupes.

9. Les groupes H_α, H_β, ... satisfont donc à deux des conditions imposées aux groupes $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$. S'il n'existe aucun groupe plus général que I, contenu dans H_α et permutable à ses substitutions, le groupe H_α, et par suite ses transformés $H_\beta, \ldots$ satisferont également à la troisième condition.

Supposons, au contraire, qu'il existe un semblable groupe $H_{\alpha 1}$; on pourra le déterminer de telle sorte qu'il ne contienne aucun groupe plus général que I et jouissant des mêmes propriétés. Soient alors $H_{\alpha 1}$, $H_{\alpha 2}$, .. les groupes transformés de $H_{\alpha 1}$ par les diverses substitutions de H. On verra, en répétant les raisonnements précédents, sauf à y remplacer G et H par H et H_α : 1° que H_α résulte de la combinaison des groupes partiels $H_{\alpha 1}, H_{\alpha 2}, \ldots$; 2° qu'en effaçant ceux de ces groupes qui dérivent de la combinaison des autres, les groupes restants $H_{\alpha a}$,

$H_{\alpha b}, \ldots$ contiennent les substitutions de I, mais qu'il n'existe aucune autre substitution commune aux deux groupes $H_{\alpha a}$ et $(H_{\alpha b}, \ldots)$; 3° que les substitutions de $H_{\alpha a}$ sont échangeables aux I près à celles de $H_{\alpha b}$.

Les groupes $H_{\alpha a}$, $H_{\alpha b}, \ldots$ et leurs transformés $H_{\beta a}$, $H_{\beta b}, \ldots; \ldots$ par les substitutions de G, qui transforment H_α en $H_\beta, \ldots$, formeront donc un système de groupes partiels dont H est dérivé, et qui satisfont à deux des conditions imposées aux groupes $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2, \ldots$. Ils satisferont en outre à la troisième, s'il n'existe aucun groupe plus général que I contenu dans $H_{\alpha a}$ et permutable à ses substitutions.

S'il existait, au contraire, un semblable groupe $H_{\alpha a1}$, on continuerait le raisonnement comme tout à l'heure, en y remplaçant G et H par H_α et $H_{\alpha a}$; et, comme les groupes décroissants H, H_α, $H_{\alpha a}, \ldots$ ne peuvent former une suite indéfinie, le théorème sera nécessairement vrai.

10. Le dernier groupe de la suite G, H, I, ..., K, 1 ne contenant d'autre substitution que l'unité, l'énoncé du théorème précédent se simplifiera pour le groupe précédent K. On aura ainsi la proposition suivante :

Le groupe K (*contenu dans* G *et permutable à ses substitutions, mais ne contenant aucun groupe moindre qui jouisse des mêmes propriétés*) *résulte de la combinaison d'un ou plusieurs groupes simples* K_1, $K_2, \ldots, K_n$. *Si* $n > 1$, *les substitutions de ces groupes seront mutuellement échangeables. Ces groupes auront d'ailleurs le même ordre* q, *et chacun d'eux n'aura aucune substitution commune* (*sauf l'unité*) *avec le groupe qui résulte de la combinaison des autres groupes partiels.*

On en conclut immédiatement qu'en désignant les substitutions de K_α par $k_{\alpha 1} \ldots, k_{\alpha q}$, les substitutions de K seront en nombre q^n, et de la forme générale $k_{1a} k_{2b} \ldots$.

On remarquera enfin que q est l'un des facteurs de composition de l'équation X, qui a pour groupe G. Cette équation est résoluble, par hypothèse, à l'aide d'équations auxiliaires E, E', .. appartenant aux types T, T', ... Pour cela, il faudra que l'une de ces équations auxiliaires ait un facteur de composition égal à q.

11. Deux cas seront ici à distinguer :

Premier cas. — *Les substitutions de* K_1 *sont échangeables entre elles.*

Soit k_1 une substitution d'ordre premier p, contenue dans K_1. Les puissances de k_1 forment un groupe contenu dans K_1 et permutable aux substitutions de K. Mais il n'existe, par hypothèse, aucun groupe moindre que K_1 et jouissant de ces propriétés; donc K_1 se réduit aux puissances de k_1, et son ordre q se réduit à p. Les groupes $K_1, K_2, \ldots$, transformés de K_1 par les substitutions de G, se réduiront aux puissances des substitutions $k_1, k_2, \ldots$ transformées de k_1. Ces substitutions étant échangeables entre elles, les substitutions de K seront toutes d'ordre p, et échangeables entre elles.

Les substitutions de K permutent transitivement les racines, sans quoi G ne serait pas primitif (*Traité*, n° 53). On en conclut que chaque substitution de K (sauf l'unité) déplace toutes les racines. En effet, si l'une d'elles s laisse immobile une racine a, soient b une autre racine quelconque, t une substitution de K qui remplace a par b; $s = t^{-1}st$ laissera b immobile, et par suite se réduira à l'unité.

Le groupe K ne contient qu'une substitution t qui remplace a par b; car, s'il en contenait une autre, u, il contiendrait tu^{-1}, qui laisse a immobile, sans se réduire à l'unité. L'ordre p^n de K sera donc précisément égal au nombre des racines $a, b, \ldots$.

Désignons ces racines par n indices $x, y, \ldots$ variables de 0 à $p-1$. Choisissons arbitrairement la racine à laquelle nous donnerons les indices $0, 0, \ldots$, et désignons par $(xy\ldots)$ celle que la substitution $k_1^x k_2^y \ldots$ lui fait succéder. L'égalité évidente

$$k_1^x k_2^y \ldots k_1^\alpha k_2^\beta \ldots = k_1^{x+\alpha} k_2^{y+\beta} \ldots$$

montre que la substitution $k_1^\alpha k_2^\beta \ldots$ remplacera $(xy\ldots)$ par

$$(x+\alpha,\ y+\beta, \ldots).$$

Donc les substitutions de K seront de la forme

$$|\ x, y, \ldots \quad x+\alpha,\ y+\beta, \ldots\ |,$$

et celles de G, qui lui sont permutables, seront de la forme linéaire

$$| x, y, \ldots \quad ax + a'y + \ldots + \alpha, \; bx + b'y + \ldots + \beta, \ldots |.$$

12. Second cas. — *Les substitutions de* K_1 *ne sont pas échangeables entre elles.*

Chacune des substitutions de G *transformera les groupes* $K_1, K_2, \ldots$ *les uns dans les autres.* — Soit, en effet, g une de ces substitutions; et supposons que le groupe L, transformé de K_1 par g, ne soit pas l'un des groupes $K_1, K_2, \ldots$. Le groupe K étant son propre transformé par g, ses substitutions seront permutables à L, ainsi qu'à $K_1, K_2, \ldots$. Elles seront donc permutables au groupe J_α formé par les substitutions communes à L et à K_α; elles le seront donc au groupe J_1, transformé de J_α par la substitution de G qui transforme K, K_α en K, K_1. Mais, par hypothèse, K_1 ne contient aucun groupe moindre permutable aux substitutions de K (sauf celui qui se réduit à la substitution 1); donc J_1, et par suite J_α, se réduit à cette substitution.

Cela posé, soient l et k_α deux substitutions prises respectivement dans L et dans K_α. La substitution $l^{-1}.k_\alpha^{-1} l k_\alpha = l^{-1} k_\alpha^{-1} l . k_\alpha$, étant commune à L et à K_α, se réduira à l'unité; donc l est échangeable à k_α.

Ainsi les substitutions de L sont échangeables à toutes celles de K_1, $K_2, \ldots$, dont K est dérivé. Celles des substitutions de K qui jouissent de cette propriété forment évidemment un groupe M. Le groupe M', transformé de M par une substitution quelconque de G, aura ses substitutions échangeables à celles de K, qui est son propre transformé; donc M' = M. Mais il n'existe, par hypothèse, aucun groupe moindre que K et permutable aux substitutions de G; donc M = K. Donc les substitutions de K, et *à fortiori* celles de K_1, seraient échangeables entre elles, contre l'hypothèse.

13. Cela posé, admettons en premier lieu que K_1 soit transitif. Son ordre q sera un multiple du nombre μ des racines (*Traité*, n° 44). On aura d'ailleurs $\mu = q$, si le nombre n des groupes $K_1, K_2, \ldots$ surpasse l'unité, et, dans aucun cas, n ne pourra surpasser 2.

En effet, les groupes $K_1, \ldots, K_n$, transformés de K_1, seront transitifs comme lui; et chacune de leurs substitutions (l'unité exceptée) dé-

placera toutes les racines. Car soient s une substitution de K_1, qui laisse immobile une racine a, b une autre racine quelconque, t une substitution de K_2, qui remplace a par b, $t^{-1}st = s$ laissera b immobile; donc s, ne déplaçant aucune racine, se réduit à l'unité.

Il résulte de là que K_1 est l'un des groupes signalés dans notre *Traité* (**71-75**). Le groupe transitif K_2, dont les substitutions sont échangeables à celles de K_1, sera le *conjoint* de K_1 (*Ibid.*, **75**).

Enfin, $n < 3$; car, s'il en était autrement, K_1 et K_3 étant tous deux conjoints à K_2, d'après ce qui précède, seraient identiques. Mais les substitutions de K_1 sont échangeables à celles de K_3; elles le seraient donc entre elles, contrairement à l'hypothèse actuelle.

14. Supposons, au contraire, que K_1 ne soit pas transitif. Soient $L_1 = (K_a,\ldots)$, $L'_1 = (K_{a'},\ldots)$,... des groupes quelconques dérivés chacun de la combinaison de quelques-uns des groupes K_1, K_2,.... On pourra grouper les racines en systèmes S_1, S'_1... en réunissant ensemble celles qui sont permutées entre elles par les substitutions de chacun des groupes L_1, L'_1,.... Les substitutions de K étant permutables à chacun des groupes $K_a,\ldots$, $K_{a'},\ldots$, le seront à L_1, L'_1,...; elles remplaceront donc les racines de chaque système par celles d'un même système. D'ailleurs, K étant transitif (**11**), ses substitutions permutent transitivement les systèmes S_1, S'_1,...; donc ils contiendront tous un même nombre μ de racines.

Connaissant deux semblables groupements en systèmes S_1, S'_1,... et S_2, S'_2,... respectivement correspondants aux groupes L_1, L'_1,... et L_2, L'_2,..., on en déduira immédiatement deux autres.

Le premier s'obtient en groupant ensemble les racines qui appartenaient à un même système dans chacun des deux groupements donnés, et qui, par suite, sont permutées entre elles par les substitutions de chacun des groupes L_1, L'_1,..., L_2, L'_2,....

Pour obtenir le second, on groupera ensemble, en un seul système plus général, tous ceux des systèmes S_1, S'_1,... qui sont permutés ensemble par les substitutions de chacun des groupes L_2, L'_2,.... Les substitutions de K, étant permutables à L_2,..., remplaceront évidemment les racines de chacun de ces nouveaux systèmes par celles d'un même nouveau système. Il est clair d'ailleurs que ces nouveaux

systèmes seront caractérisés par la propriété que les racines de chacun d'eux soient permutées entre elles par les substitutions de chacun des groupes (L_1, L_2), (L_1, L'_2),..., (L'_1, L_2), (L'_1, L'_2),....

15. Cela posé, parmi les diverses manières de choisir les groupes L_1, L'_1,..., prenons l'une de celles pour lesquelles μ est *minimum*, tout en restant supérieur à 1; μ sera inférieur au nombre total des racines, car il est au plus égal au nombre des racines que permutent ensemble les substitutions du groupe non transitif K_1. On aura donc plusieurs systèmes S_1, S'_1,....

Soient maintenant $g_1 = 1$, g_2,..., g_ρ,... les diverses substitutions de G; S_1, S'_1,...; S_2, S'_2,...; ...; S_ρ, S'_ρ,...; ... les divers systèmes de racines par lesquels elles remplacent respectivement les systèmes S_1, S'_1,.... Le groupe K étant permutable à g_1,..., g_ρ,..., il est clair que ses substitutions remplacent les racines de chacun des systèmes S_ρ, S'_ρ,... par celles d'un même système, et que ce nouveau groupement des racines en systèmes correspondra aux groupes L_ρ, L'_ρ,... transformés de L_1, L'_1,... par g_ρ.

Le groupe G étant primitif, l'une au moins de ses substitutions g_2 ne remplacera pas les systèmes S_1, S'_1,... les uns par les autres. Cela étant, les μ racines de chacun des systèmes S_2, S'_2,... appartiendront à μ systèmes différents de la suite S_1, S'_1,.... Supposons en effet que ν racines de S_2 appartinssent à S_1, par exemple. Des deux groupements en systèmes S_1, S'_1,... et S_2, S'_2,... on en déduirait un troisième où l'un des systèmes serait exclusivement formé de ces ν racines communes (**14**); μ ne serait donc pas le minimum supposé, à moins que l'on n'eût $\nu = \mu$, d'où $S_1 = S_2$. Mais alors les systèmes S_1, S'_1,... se confondraient, à l'ordre près, avec S_2, S'_2,... (résultat inadmissible). En effet, soit k une substitution de K qui remplace $S_1 = S_2$ par un autre système S^γ_1 de la suite S_1, S'_1,...; elle doit le remplacer par un autre système S^δ_2 de la suite S_2, S'_2,...; donc $S^\gamma_1 = S^\delta_2$.

Cela posé, en combinant les deux groupements S_1, S'_1,... et S_2, S'_2,..., on obtiendra un nouveau groupement en systèmes S_{12}, S'_{12},... contenant chacun μ^2 racines (**14**). Considérons maintenant l'un des systèmes S_3, S'_3,.... S'il n'est pas contenu en entier dans l'un des systèmes S_{12}, S'_{12},..., ses μ racines appartiendront à μ systèmes différents. Car si ν d'entre les racines de S_3 appartiennent à S_{12}, on obtiendra (**14**)

un nouveau groupement en systèmes formés de ν racines; et si ν était $< \mu$ mais > 1, μ ne serait pas le minimum supposé.

Supposons, pour fixer les idées, que les racines de S_3 appartiennent à μ systèmes différents de la suite S_{12}, S'_{12},... Le procédé du n° **14** permettra de trouver un nouveau groupement en systèmes S_{123}, S'_{123}, formés chacun de la réunion de μ des systèmes S_{12}, S'_{12},... et contenant ainsi μ^3 racines.

On continuerait à raisonner de la même manière si, parmi les systèmes S_4, S'_4,..., ...; S_ρ, S'_ρ,...; ..., il en existait un dont les racines ne fussent pas contenues dans un seul des systèmes S_{123}, S'_{123},.... Adoptons donc, pour fixer les idées, l'hypothèse contraire. Chaque substitution g du groupe G permute les unes dans les autres les suites S_1, S'_1,...; ...; S_ρ, S'_ρ,...; .... Elle remplacera donc chacun des systèmes S_{123}, S'_{123},..., dont les racines sont associées exclusivement entre elles dans les systèmes de chacune de ces suites, par un système qui jouira de la même propriété, et qui, en conséquence appartiendra à la suite S_{123}, S'_{123},....

Mais G est primitif; donc les systèmes S_{123}, S'_{123},... se réduiront à un seul, et le nombre total des racines sera ici égal à μ^3 (plus généralement à une puissance de μ, telle que μ^m).

16. Cela posé, on pourra distinguer les μ systèmes S_{12}, S'_{12},... les uns des autres par un indice x, variable de 0 à $\mu - 1$. De même, en combinant les deux groupements S_2, S'_2,... et S_3, S'_3,..., on obtiendra un nouveau groupement en μ systèmes S_{23}, S'_{23},.., (contenant chacun μ^2 racines), que l'on pourra distinguer par un second indice y. Enfin, on obtiendra d'une manière analogue un nouveau groupement en μ systèmes S_{31}, S'_{31},..., que l'on distinguera par un dernier indice z.

On pourrait, d'après le n° **14**, obtenir un nouveau groupement de racines en systèmes, en réunissant celles qui appartiennent au même système dans chacun des trois groupements S_{12}, S'_{12},...; S_{23}, S'_{23},...; S_{31}, S'_{31},..., et qui, par suite, ont les mêmes indices x, y, z. Mais il est aisé de voir que ces nouveaux systèmes ne contiennent chacun qu'une racine. En effet, les racines de S_3, et, *a fortiori*, les μ^2 racines de S_{23}, appartiennent au moins à μ systèmes différents de la suite S_{12}, S'_{12},.... Donc, chacun des systèmes de cette suite, tel que S_{12}, aura tout au plus μ racines communes avec S_{23}. Mais ces deux systèmes ont préci-

sément en commun les μ racines de S_2. Ces racines appartiendront à μ systèmes différents de la suite S_{31}, S'_{31},... ; car, s'il en était autrement, le nombre des racines se réduirait à μ^2, au lieu d'être égal à μ^3 (15). Donc chacun des systèmes S_{31}, S'_{31},... ne contient qu'une racine qui soit en même temps contenue dans S_{12} et dans S_{23}.

Les racines pourront donc être caractérisées par les divers systèmes de valeurs des indices x, y, z. Cela posé, les substitutions de K, remplaçant les racines de chacun des systèmes S_{12}, S'_{12},... par celles d'un même système, remplaceront x par une fonction de x seul; de même pour chacun des autres indices : elles seront donc de la forme

$$(1) \qquad | x, y, z \quad f(x), \quad f_1(y), \quad f_2(z) |.$$

17. Soit en particulier K_ρ l'un quelconque des groupes K_1, K_2,... ; ses substitutions seront de la forme (1), et *si elles ne laissent pas invariable l'indice x, par exemple, elles permuteront transitivement entre elles les diverses valeurs de cet indice*. Supposons, en effet, qu'il en fût autrement, et que chacune des substitutions de K_ρ fît succéder aux racines dont le premier indice est o d'autres racines dans lesquelles le premier indice ne prît que ν valeurs distinctes, telles que o, 1,..., $\nu - 1$, ν étant $< \mu$. Il est clair que K_ρ permuterait exclusivement ensemble les racines dont le premier indice est inférieur à ν. Cela posé, en réunissant ensemble les racines que K_ρ permute entre elles, on aura un groupement en systèmes σ, σ'_1.... En le combinant avec le groupement S_{12}, S'_{12},... déjà trouvé, on obtiendra un nouveau groupement Σ, Σ',... dont un système sera évidemment formé de toutes les racines dont le premier indice est inférieur à ν. Mais, d'autre part, nous avons un groupement S_3, S'_3,... dont les divers systèmes sont respectivement formés de racines qui ne diffèrent que par le premier indice x. Les racines qui appartiennent à un même système dans chacun des deux groupements Σ, Σ',... et S_3, S'_3,..., jointes ensemble, donneraient un nouveau groupement dont les systèmes contiendraient un nombre ν de racines inférieur à μ, ce qui est supposé impossible.

18. Les raisonnements que nous venons de faire, en supposant le nombre des racines égal à μ^3, s'appliquent évidemment au cas plus

général où ce nombre serait égal à p^m, sauf qu'on aura m indices x, y, z,... au lieu de trois.

L'un au moins de ces indices est altéré par les substitutions de plusieurs des groupes K_1, K_2,... Supposons, en effet, qu'il en fût autrement. Remplaçons ceux des indices que K_1 altère par un seul indice x_1, ceux que K_2 altère par un indice x_2, etc., et groupons dans un même système les racines pour lesquelles un de ces indices, tel que x_r, a la même valeur. Les substitutions de K_r permuteront les systèmes, en remplaçant les unes par les autres les racines dont tous les indices, à l'exception de x_r, ont les mêmes valeurs. D'autre part, les substitutions du groupe $H_r = (K_1,\ldots, K_{r-1}, K_{r+1},\ldots)$ permuteront exclusivement ensemble les racines d'un même système; elles les permuteront d'ailleurs transitivement, sans quoi K ne serait pas transitif, comme il doit l'être. Cela posé, soit g une substitution quelconque de G; elle permute les uns dans les autres les groupes K_1, K_2,... Soit $K_{f(r)}$ celui de ces groupes qu'elle transforme en K_r; elle transforme évidemment $H_{f(r)}$ en H_r. Donc elle remplacera les racines correspondantes à une même valeur de l'indice $x_{f(r)}$, lesquelles sont permutées ensemble par les substitutions de $H_{f(r)}$, par des racines qui soient permutées ensemble par les substitutions de H_r, et dans lesquelles, par suite, l'indice x_r aura une même valeur, laquelle ne dépendra que de la valeur particulière assignée à $x_{f(r)}$. Donc la substitution g sera de la forme

$$|\, x_r \quad \varphi_r[x_{f(r)}]\,|,$$

et G sera décomposable, résultat contraire à l'hypothèse actuelle.

19. Admettons donc que l'indice x, par exemple, soit altéré par deux groupes au moins, K_r et K_s de la suite K_1, K_2,.... Soient

$$|\, x, y,\ldots \quad f(x), f_1(y),\ldots \,|,\ldots$$

les substitutions de K_r,

$$|\, x, y,\ldots \quad \varphi(x),\ \varphi_1(y),\ldots \,|,\ldots$$

celles de K_s, lesquelles seront échangeables aux précédentes; *a fortiori*, les substitutions $|\, x \quad \varphi(x)\,|$,... seront échangeables aux substitu-

tions $|x \quad f(x)|, \ldots$ Les deux groupes M_r et M_s, formés par ces substitutions, sont d'ailleurs transitifs (**17**). Donc leur ordre est égal à leur degré μ, et ils sont conjoints.

L'ordre de K_r *se réduira lui-même à* μ. En effet, il est évidemment égal à l'ordre de M_r, multiplié par l'ordre du groupe N_r, formé par celles des substitutions de K_r qui n'altèrent pas l'indice x. Mais il est clair que N_r est permutable aux substitutions de K_r, et K_r est simple, par hypothèse; donc N_r se réduit à la seule substitution 1.

Les groupes $K_1, K_2, \ldots$, transformés de K_r, auront aussi leur ordre égal à μ. Le nombre des racines que chacun d'eux permute entre elles est donc un diviseur de μ; mais, par hypothèse, il ne peut être moindre que μ; il lui est donc égal.

20 Cela posé, réunissons ensemble les racines que les substitutions de K_1 permutent entre elles; on aura ainsi un groupement en systèmes contenant chacun μ racines; et rien n'empêche d'admettre que ces systèmes sont précisément ceux que nous avons désignés par S_1, $S'_1, \ldots$ Dans cette hypothèse, les groupements $S_1, S'_1, \ldots; S_2, S'_2, \ldots; \ldots$, qui se déduisent du premier groupement $S_1, S'_1, \ldots$ en y effectuant les substitutions $g_1, g_2, \ldots$ du groupe G (**15**), correspondront respectivement aux groupes transformés de K_1 par ces mêmes substitutions. En particulier, les m premiers groupements $S_1, S'_1, \ldots; \ldots; S_m, S'_m, \ldots$, étant essentiellement distincts, correspondront à m groupes distincts $K_1, \ldots, K_m$.

Soient $\alpha, \beta, \ldots$ des entiers quelconques différents et non supérieurs à m, le groupement $S_{\alpha\beta\ldots}, S'_{\alpha\beta\ldots}, \ldots$ résultant de la combinaison des groupements $S_\alpha, S'_\alpha, \ldots; S_\beta, S'_\beta, \ldots; \ldots$, comme il est indiqué au n° **16**, correspondra au groupe $(K_\alpha, K_\beta, \ldots)$.

Nous continuerons de caractériser les racines par m indices x, $y, z, \ldots$ choisis de telle sorte que deux racines aient le même premier indice si elles appartiennent au même systeme dans le groupement $S_{12\ldots(m-1)}, S'_{12\ldots m-1}, \ldots$ [autrement dit, si elles sont permutées ensemble par les substitutions du groupe $(K_1, K_2, \ldots, K_{m-1})$ correspondant à ce groupement]; le même second indice, si elles sont permutées par les substitutions du groupe $(K_2, \ldots, K_m)$, etc. Cela posé, les substitutions de K_m, appartenant à chacun des groupes $(K_2, K_3, \ldots, K_m)$, $(K_1, K_3, K_m), \ldots$ laisseront invariable chacun des indices $y, z, \ldots$

D'ailleurs, elles sont de la forme (1); donc, elles se réduiront à la forme

$$| x, y, z, \ldots \quad f(x), y, z, \ldots |.$$

De même, les substitutions de K_1 seront de la forme

$$| x, y, z, \ldots \quad x, f_1(y), z, \ldots |,$$

celles de K_2 de la forme

$$| x, y, z, \ldots \quad x, y, f_2(z), \ldots |,$$

etc,...

21. Cela posé, nous avons vu (**18**) que l'un au moins des indices x, y, z,..., par exemple x, est altéré par plusieurs groupes de la suite $K_1, \ldots, K_n$; or x est altéré par K_m et ne l'est pas par $K_1, \ldots, K_{m-1}$. Donc m sera $< n$, et x sera altéré par l'un au moins des groupes $K_{m+1}, \ldots, K_n$, tel que K_{m+1}. D'ailleurs, les substitutions de K_{m+1} sont de la forme (1).

Les substitutions de K_m et de K_{m+1} étant mutuellement échangeables, il en sera de même *a fortiori* des altérations

$$| x \quad f(x) |, \ldots \qquad \text{et} \qquad | x \quad \varphi(x) |, \ldots$$

que ces substitutions font subir à l'indice x. Or, soient respectivement H et I les deux groupes formés par ces altérations. Ils sont transitifs (**17**). Donc leur ordre q est égal à leur degré μ, et ce seront des groupes conjoints.

La suite $K_1, \ldots, K_n$ ne contient aucun autre groupe K_r dont les substitutions altèrent x. Car ces altérations formeraient un groupe J conjoint à I, et, par suite, identique à H; d'autre part, les substitutions de K_r étant échangeables à celles de K_1, celles de J le seraient *a fortiori* à celles de H; donc H, et par suite K_m, aurait toutes ses substitutions échangeables entre elles; son transformé K_1 jouirait de la même propriété, contrairement à l'hypothèse.

22. *La suite* $K_{m+1}, \ldots, K_n$ *se réduit à un seul groupe* K_{m+1}, *dont les substitutions altèrent tous les indices* x, y, z,.... Admettons, en effet, pour fixer les idées, qu'elle contînt deux groupes, dont le premier,

K_{m+1}, altérât les indices x, y seulement. Le groupe suivant, K_{m+2}, ne pourra altérer ces indices, comme on vient de le voir. Admettons qu'il altère les deux indices z, u. Les trois groupes K_1, K_m, K_{m+1} jouissent de la propriété de permuter chaque racine avec μ^2 racines, que deux quelconques de ces groupes suffiraient d'ailleurs pour permuter avec elle. Leurs transformés par une substitution quelconque de G, jouiront évidemment de la même propriété. Mais, d'autre part, il est clair que, parmi les systèmes de trois groupes à prendre dans la suite $K_1, \ldots, K_{m+2}$ les systèmes $C_1 = (K_1, K_m, K_{m+1})$ et $C_2 = (K_2, K_3, K_{m+2})$ sont les seuls qui jouissent de cette propriété. Or les substitutions de C_1 et de C_2 permutent exclusivement ensemble, et transitivement, les racines qui ne se distinguent que par les indices x, y, z, u. S'il existait d'autres indices $v, \ldots$, il faudrait, pour que les substitutions de G fussent permutables au groupe (C_1, C_2), qu'elles fissent succéder à $v, \ldots$ des fonctions de $v, \ldots$ seulement. Donc G ne serait pas primitif, résultat inadmissible.

Il n'y aura donc que quatre indices x, y, z, u. On pourra remplacer x et y par un seul indice x_1, z et u par un autre indice x_2. Les substitutions de C_1 n'altéreront que l'indice x_1, celles de C_2 que l'indice x_2. Les substitutions de G transformant exclusivement les uns dans les autres les groupes C_1 et C_2, on voit, comme au n° **18**, que l'une quelconque d'entre elles sera de la forme

$$| x_r \quad \varphi[x_{f(r)}] | ;$$

G sera donc décomposable, résultat inadmissible.

Notre proposition est donc établie.

23. Les groupes $K_1, \ldots, K_m$, transformés de K_1 par des substitutions de G, sont isomorphes entre eux. Les altérations que leurs substitutions font respectivement subir aux indices x, y, z formeront des groupes isomorphes. Mais ils ont leur ordre égal à leur degré, et des groupes transitifs, jouissant de cette propriété, ne peuvent être isomorphes, à moins d'être identiques à la notation près (*Traité des substitutions*, **71-72**). On pourra donc, par un choix convenable dans la notation, faire en sorte que les substitutions de $K_1, \ldots, K_{m-1}$ altèrent respectivement $y, \ldots$ de la même manière que celles de K_m altèrent x.

24. Les substitutions de G permutant les uns dans les autres les groupes $K_1, \ldots, K_n$, ces groupes dépendront d'une équation de degré $n = m + 1$. Celle-ci résolue, le groupe de l'équation proposée se réduit à celles de ses substitutions qui sont permutables à chacun des groupes $K_1, \ldots, K_n$, lesquelles seront de la forme

$$|x, y, z, \ldots \quad \varphi(x), \varphi_1(y), \varphi_2(z), \ldots|.$$

Mais alors les μ^m racines de l'équation peuvent être groupées de m manières en systèmes, en réunissant ensemble celles qui ne diffèrent que par un seul indice. Dans chacun de ces groupements, les systèmes dépendront d'une équation du degré μ. La proposée se résoudra donc par une équation de degré $m+1$ et m équations de degré μ.

25. Les principaux résultats des recherches précédentes peuvent être énoncés comme il suit :

Théorème I. — *La recherche des groupes résolubles les plus généraux se ramène immédiatement à celle des groupes résolubles primitifs et indécomposables les plus généraux.*

Théorème II. — *Ces derniers groupes ont pour degré μ^m, m étant entier, et μ un diviseur de l'un des facteurs de composition q de l'une des équations auxiliaires dont les conditions du problème font dépendre les équations cherchées.*

Si μ est un nombre premier, les groupes cherchés ont toutes leurs substitutions de la forme linéaire

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m + \alpha_1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m & c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m + \alpha_m \end{vmatrix}$$

Si μ n'étant pas premier, m est > 1, on aura $\mu = q$, et les équations cherchées pourront se résoudre à l'aide d'une équation résoluble de degré $m+1$, et de m équations résolubles de degré μ.

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Boussinesq, *présenté le* 19 *avril* 1869, *avec additions du* 29 *novembre, et relatif à la théorie des ondes liquides périodiques;* par MM. Delaunay, Bonnet, Jamin, de Saint-Venant rapporteur.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, séance du 7 février 1870.)

La formation et la propagation des ondes à la surface des eaux, ainsi que dans l'intérieur de leurs masses, ont occupé de tous temps les physiciens et les géomètres.

Et, depuis que d'Alembert et Euler ont donné des équations différentielles exprimant d'une manière générale les mouvements des fluides, au moins quand on néglige les frottements qui se développent entre leurs couches et contre les parois qui les contiennent, les plus illustres de leurs successeurs ont cherché à déterminer par l'analyse les lois de ce phénomène intéressant. On sait qu'en se bornant à considérer des oscillations très-petites, ce qui est à peu près nécessaire pour pouvoir arriver à des résultats dignes de remarque, Laplace est parvenu, il y a bientôt un siècle [*], à exprimer ce que devient successivement un liquide pesant dont la surface, sans recevoir aucune impulsion, aurait été amenée initialement à prendre la forme de la courbe serpentante dont les ordonnées sont les cosinus d'arcs proportionnels aux abscisses; que Lagrange [**] a trouvé, lorsque l'eau est

[*] A l'article XXXVII et dernier de ses *Recherches sur plusieurs points du système du monde* (*Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1776, p. 542).

[**] *Académie de Berlin*, 1786; et ensuite, *Mécanique analytique*, 2e Partie, Section XI, art. 35 et suivants.

contenue dans un canal prismatique rectangulaire très-peu profond, une expression simple ($\sqrt{gh}$, ou la vitesse qu'acquiert librement un corps pesant tombant de la moitié de la profondeur h) pour la vitesse de propagation de cette intumescence aujourd'hui appelée *onde solitaire,* et qui est provoquée par un petit ébranlement longitudinal supposé s'étendre à toute la hauteur d'une section transversale; formule qui a été confirmée, depuis, par diverses expériences [*], et qui pourrait être démontrée élémentairement dans le cours de physique de la même manière très-simple dont M. Babinet est parvenu, en 1826, à démontrer la formule plus connue de la vitesse du son [**]. On sait que Poisson, après avoir très-bien fait voir que l'on ne pouvait nullement, en bornant la profondeur supposée des agitations, étendre cette formule, comme le pensait Lagrange, à ce qui se passe dans une eau profonde [***], a donné une formule générale pour les états successifs d'une masse d'eau de profondeur constante quelconque, dont la surface supérieure aurait eu une forme initiale aussi quelconque et donnée. Cette formule revient à la somme d'un nombre infini d'expressions comme celle qu'on peut tirer de l'analyse de Laplace, et qui jouerait ainsi, dans la théorie des ondes, le même rôle que la formule pendulaire de Taylor dans celle des cordes vibrantes. Et Poisson, en

---

[*] Entre autres celles de Scott Russel (*Annales des Ponts et Chaussées,* vers 1836), de qui est la dénomination que nous venons de rapporter; celles de M. Bazin (*Comptes rendus,* t. LV, p. 353, et t. LVII, p. 302), qui a reconnu la nécessité d'ajouter à l'expression $\sqrt{gh}$ de Lagrange la vitesse propre de l'eau quand elle est courante, et de prendre pour h la profondeur d'équilibre, plus celle de l'intumescence; et celles de M. de Caligny, qui a prouvé que, pour un ébranlement peu profond, l'onde solitaire prend cette vitesse seulement lorsque le mouvement a eu le temps de s'étendre à toute la profondeur du canal.

[**] *Exercices de physique, ou Recueil de questions de composition écrite,* par I. (Isidore) Pierre, 196e exercice, p. 155 de l'édition de 1862. On peut voir aussi le *Mémoire sur le choc longitudinal de deux barres élastiques,* au tome XII, 1867, 2e série, du *Journal de M. Liouville,* note du n° 16. L'auteur de ce Mémoire croyait être le premier à donner cette démonstration, dont il se plaît à reconnaître que la priorité appartient à M. Babinet.

[***] *Mémoire sur les ondes,* déposé le 28 août, lu le 2 octobre 1815 (*Société Philomathique,* 1815 et 1817, p. 163 et 85) et imprimé au tome Ier (1826) de ceux de l'Institut.

transformant, comme Fourier, une pareille somme en une intégrale double ou quadruple, a montré comment on pourrait supposer discontinue la courbe de l'état initial de la surface. Mais il n'a pu en tirer des lois distinctes qu'en supposant l'eau infiniment profonde, et les ondes provoquées par l'émersion brusque d'un corps solide paraboloïdal, qui préalablement y aurait été très-peu immergé. La loi principale est toujours très-complexe, car l'illustre géomètre trouve qu'il se propage, tout autour, une première série d'ondes dont le rayon augmente proportionnellement au carré du temps, mais à laquelle vient bientôt se superposer une série d'ondes plus importantes et plus larges, dont chacune a plus de hauteur que la suivante et marche avec une vitesse qui dépend des dimensions horizontales du corps immergé.

On connaît aussi, sur le même sujet, les recherches étendues de Cauchy [*], qui a pris occasion de la question des ondes pour donner d'importants théorèmes d'hydrodynamique et d'analyse, et qui est arrivé à des résultats plus généraux pour les ondes provoquées par une brusque rupture de l'équilibre dans une portion peu étendue de la surface du fluide, en ajoutant ce qui arrive dans le cas d'une impulsion qu'on lui aurait imprimée. Des additions à son Mémoire de 1816 ont été faites postérieurement à la publication, par Fourier, d'une Note sur le même sujet, au *Bulletin de la Société Philomathique*.

L'auteur du Mémoire dont nous avons à rendre compte s'est proposé d'étudier un phénomène qui, malgré quelques analogies, est essentiellement différent, et dont les lois sont plus simples. Il considère une masse fluide d'une profondeur finie, où il suppose qu'un ébranlement périodique est produit dans un espace limité soit en tous sens, soit dans un ou deux sens; et il détermine les mouvements, nécessairement de même période, qui en résultent dans tout le reste de la masse, spécialement aux points situés au delà d'une certaine distance de ceux où l'ébranlement a été provoqué; mouvements qui, au lieu de s'éteindre graduellement, comme dans les questions traitées par les grands géomètres cités, conservent une amplitude qui ne

---

[*] Mémoire qui a remporté le prix en 1816 et qui a été imprimé au tome Ier (1827) des *Savants étrangers*.

varie pas avec le temps, vu que la cause productrice est supposée ne pas cesser d'agir.

Pour cela M. Boussinesq commence par établir, d'une manière nouvelle, des équations différentielles générales du mouvement, où figurent les trois composantes rectangulaires, non pas des *vitesses* des molécules fluides comme dans celles d'Euler, mais des *déplacements* qu'elles ont éprouvés, et auxquels il suppose d'abord des grandeurs quelconques. A cet effet, il exprime les trois conditions de l'équilibre de translation d'un élément parallélépipède ayant *actuellement* ses côtés parallèles aux trois axes coordonnés fixes et rectangles, après avoir déterminé, en résolvant successivement trois groupes de trois équations du premier degré, quelles étaient les coordonnées *primitives*, ou avant les déplacements éprouvés, de quatre des huit sommets de ce petit solide initialement obliquangle. Ce sont, en effet, les neuf différences deux à deux de ces coordonnées primitives, c'est-à-dire les neuf excès, sur celles (x, y, z) d'un des sommets, de celles de trois autres, qui doivent entrer dans les équations d'équilibre, et y affecter les neuf dérivées des composantes de pressions sur les faces de l'élément; composantes qui sont censées exprimées en fonction des coordonnées initiales et non des coordonnées ultérieures. On n'aurait évidemment que des équations d'équilibre non rigoureuses ni complètes si, au lieu de cela, l'on ne faisait entrer dans les premiers membres de chacune, que trois des neuf dérivées des composantes de pression, en les affectant des trois dimensions actuelles de l'élément devenu rectangulaire.

En introduisant ensuite la supposition que non-seulement les côtés de l'élément, mais même les déplacements éprouvés, ont été très-petits, les équations se modifient, mais conservent une forme très-générale bien adaptée à la solution des problèmes d'ondes et de vibrations. Elles donnent la propagation du son à travers le liquide si l'on y néglige les termes affectés de la pesanteur, en mettant, à la place de la partie dynamique de la pression, le produit de la très-petite compression de l'unité de volume par un coefficient d'élasticité très-considérable; et elles donnent les ondes liquides proprement dites en conservant dans chacune, sans une pareille transformation, cette pression qui plus tard sera éliminée, et en regardant comme nulle,

par rapport à chacun des trois termes qui composent son expression, la compression de volume, bien que l'existence de cette compression puisse seule expliquer physiquement la pression et ses différences. De pareilles équations, laissées avec tous leurs termes, l'on ne retirerait pas forcément cette conséquence paradoxale et physiquement fausse, fournie, suivant Poisson, par les équations ordinaires et incomplètes : « que les ébranlements provoqués quelque part dans les liquides se transmettent *instantanément* dans toute leur masse. »

Dans les équations ainsi établies, M. Boussinesq a introduit de suite, conformément à son objet, la condition ou la restriction que les déplacements soient périodiques et de même période dans toute la masse. Il en résulte que le potentiel du déplacement d'une molécule quelconque, ou la fonction (φ) qui, différentiée par rapport à ses trois coordonnées, donne les trois projections (u, v, w) de ce déplacement sur les coordonnées respectives (x, y, z), n'est autre chose qu'une quantité proportionnelle à la fois au carré du temps d'une période et à la partie dynamique de la pression. Cette quantité est nécessairement périodique, et a pour grandeur le produit d'une fonction positive des coordonnées, mesurant l'amplitude de ses variations, par le cosinus d'un arc proportionnel au temps diminué d'une autre fonction des coordonnées; fonction qui, lorsqu'on l'égale à une constante, donne l'équation des ondes, c'est-à-dire des surfaces formées par un ensemble de points de la masse fluide, dont les vibrations sont au même instant à une même phase de leurs évolutions autour de la situation moyenne de chacun.

Ces deux fonctions sont astreintes à satisfaire à deux équations différentielles indéfinies, et à des conditions définies relatives à la surface et au fond.

Avant de les résoudre pour des mouvements propagés à partir d'un centre ou d'une surface quelconque d'ébranlement, l'auteur montre qu'on y satisfait par des ondes planes, verticales et parallèles, d'une vitesse de propagation constante, mais d'une amplitude variable de la surface au fond. Il trouve que cette amplitude doit être le produit d'une constante par le *cosinus hyperbolique* du nombre de fois que la distance au fond contient le rayon d'une circonférence mesurant la *longueur d'onde* (en appelant ainsi, comme dans d'autres théories,

l'espace qui serait parcouru pendant le temps d'une période en vertu de la vitesse de propagation des ondes). Et, en exprimant la condition relative à la surface, il reconnaît que la vitesse de propagation est racine d'une équation exprimant que la tangente hyperbolique du nombre dont on vient de parler, particularisé pour les points de la surface supérieure, est à ce nombre lui-même, comme le carré de la vitesse inconnue est au carré de celle qu'acquerrait un corps pesant en tombant librement d'une hauteur égale à la moitié de la profondeur de la masse liquide. Cette équation transcendante, comme le démontre ingénieusement l'auteur, n'a jamais qu'une seule racine positive ou qui convienne à la question. On voit que, lorsque l'eau est assez peu profonde et le nombre des vibrations imprimées dans un temps donné assez peu considérable pour que la profondeur d'eau soit bien plus petite que la longueur d'onde, en sorte que la tangente hyperbolique soit sensiblement égale à son arc ou module, alors petit, l'on a pour la vitesse de propagation l'expression trouvée par Lagrange relativement à l'onde solitaire; mais que quand la profondeur, au contraire, est grande et les périodes courtes, en sorte que la même tangente hyperbolique devient sensiblement égale à l'unité, la vitesse de propagation a pour valeur très-approchée, en mètres, 1 fois, 5612 $\left(\frac{g}{2\pi}\text{ fois}\right)$ le temps de la période en secondes.

Or M. Boussinesq montre que le mouvement par ondes planes se réalise très-approximativement lorsqu'on se borne à considérer des points assez éloignés des centres d'ébranlement. Le coefficient traité ci-dessus comme constant, qui, dans l'expression de l'amplitude, multiplie le cosinus hyperbolique d'un nombre proportionnel à la hauteur au-dessus du fond, se trouve remplacé par une fonction des coordonnées, mais extrêmement peu variable sur une même verticale, et ne variant que lentement d'une verticale à l'autre. Il reconnaît que les molécules décrivent, autour de leurs positions d'équilibre, de petites ellipses dans des plans verticaux, normaux aux ondes. Chacune de ces ellipses a son plus grand axe horizontal. Infiniment aplaties auprès du fond aussi horizontal sur lequel la masse liquide repose, ces ellipses, si les vibrations ne sont pas trop lentes, approchent, vers la surface, de la forme circulaire, sans toutefois que la distance focale

s'annule; car, pour toutes les molécules situées sur une même verticale, cette distance est constante, et égale par conséquent à la petite course rectiligne des molécules du fond. Chaque ellipse est décrite de manière que la molécule, en parcourant la moitié supérieure de sa trajectoire, s'éloigne de l'endroit du fluide où l'ébranlement a été provoqué, tandis qu'elle s'en approche en parcourant la moitié inférieure. Le mouvement par ondes rigoureusement planes, et représenté par deux coordonnées seulement, aura lieu dans un canal horizontal prismatique à section rectangle, si l'ébranlement périodique est provoqué dans un plan vertical et transversal. L'analyse donne, comme on voit, des résultats en rapport avec ce qui a été observé par M. de Caligny dans ses expériences, où, cependant, les oscillations n'étaient pas très-petites [*].

Du reste, dans le cas le plus général, ces ondes, qui dans des portions peu étendues peuvent être regardées comme planes, sont, par le fait, des cylindres ayant tous, à très-peu près, les mêmes normales, et, par suite, les mêmes centres principaux de courbure. L'une d'elles étant donnée, toute autre s'obtient en menant à celle-ci une infinité de normales d'égale longueur, grande ou petite, et en faisant passer une surface par leurs extrémités. L'amplitude varie le long d'une même normale en raison inverse de la racine carrée de la distance au centre de courbure correspondant. D'une normale à l'autre, elle peut varier arbitrairement, et la fonction arbitraire ainsi introduite dépend du mode particulier de production des ébranlements. Il en est de même de la première surface d'onde considérée, c'est-à-dire de celle qui est la plus voisine des centres d'ébranlement parmi celles auxquelles s'applique la théorie exposée : sa forme change évidemment, suivant que le fluide est directement agité dans un petit espace autour d'un point, ou sur toute l'étendue d'une surface de longueur indéfinie.

Ces lois s'observent pourvu que la vitesse de propagation des ondes soit, à très-peu près, constante. Or elle l'est dès que la distance aux points d'ébranlement contient un nombre assez grand de fois la longueur d'onde. Les variations fort petites de la vitesse sont alors, sui-

[*] *Société Philomathique*, 1842, et *Comptes rendus*, 26 avril 1869, t. LXVIII, p. 980.

vant une même normale aux ondes, en raison inverse du carré de la distance au centre de courbure correspondant.

M. Boussinesq applique ces résultats au cas où les ébranlements ne sont directement produits que dans un espace très-petit autour de l'origine, et où, par suite, les ondes sont des cylindres circulaires concentriques.

Ensuite, il y ramène le cas plus général où la première des surfaces d'onde considérées est un cylindre vertical à base quelconque. Il emploie pour cela des considérations géométriques délicates, qui ont de l'analogie avec celles dont s'est servi Fresnel dans ses explications de la réflexion et de la réfraction de la lumière; car il regarde chaque élément d'un certain cylindre construit à une petite distance constante en arrière de la première onde donnée, comme un centre ou un axe d'ébranlement qui engendre et propage, tout autour, des ondes à base circulaire. En considérant un point quelconque de l'onde donnée, il fait voir que la propagation des petites ondes circulaires dont on vient de parler y enverra des mouvements en partie discordants, et se détruisant les uns les autres, à l'exception de ceux qui émanent d'éléments verticaux fort proches du pied de la normale menée du point considéré au cylindre. Or, si l'on admet que les mouvements élémentaires envoyés suivant cette normale se trouvent, en arrivant au point considéré, en avance d'un huitième de vibration sur ceux qui y sont effectivement produits, la somme des mouvements élémentaires envoyés par les éléments verticaux voisins du pied de la normale équivaudra, au point considéré, comme l'auteur le démontre simplement, aux mouvements effectifs. Cette somme, vérifiant d'ailleurs les équations différentielles des ondes liquides périodiques, constitue, par conséquent, la solution cherchée.

Mais le même procédé géométrique et en quelque sorte élémentaire lui permet d'aborder aussitôt en peu de lignes un cas encore plus général, et d'en indiquer la solution complète. C'est le cas où la surface cylindrique, sur toute l'étendue de laquelle l'amplitude des mouvements est supposée connue, couperait les ondes et ne serait plus, par conséquent, l'une de celles-ci. On devrait donner alors, en même temps, sur chaque verticale de cette surface, la direction de la surface d'onde qui y passe. On construira toujours, en arrière du cylindre

proposé, un autre cylindre, lieu des axes des ondes circulaires fictives, alors obliques à l'un comme à l'autre; mais l'amplitude des éléments fictifs qu'envoie chacun des éléments verticaux de celui-ci, au lieu d'être proportionnelle à la largeur de l'élément, ne l'est plus qu'à la projection de cette largeur sur l'onde effective voisine.

Déjà, dans un Mémoire sur les vibrations transversales de l'éther et sur la diffraction de la lumière, imprimé en 1868 (*Journal de Mathématiques*), M. Boussinesq s'était livré à des considérations semblables, susceptibles d'une utile généralisation.

Il applique aussi sa théorie à un phénomène de *diffraction* des ondes liquides qui serait produit si une plaque verticale solide, plongée dans le fluide ébranlé, venait à intercepter une partie des ondes produites Nous n'analyserons pas cette partie de son travail, dont les divers résultats sont établis analytiquement sans faire appel aux méthodes d'approximation. L'une des conclusions est qu'il se formera à la surface, au delà de l'obstacle, des franges ou rides hyperboliques.

Nous ne le suivrons pas non plus dans les diverses parties d'une première Note finale, où il tient compte de termes de l'ordre des carrés et des produits des déplacements, c'est-à-dire supposés tels qu'on ne puisse plus les envisager comme très petits. Les mouvements périodiques longitudinaux dans un canal, par exemple, ne peuvent alors être *pendulaires* que lorsqu'on suppose la profondeur infinie. Les centres des trajectoires des molécules diffèrent légèrement de leurs positions d'équilibre; et, dans ce même cas, comme le mouvement moléculaire *au fond* doit être nul, l'excentricité, égale pour tous les points d'une même verticale, comme on a dit, est nécessairement zéro partout, et les trajectoires sont toutes circulaires. Cela est conforme à une Note de M. Reech, insérée au *Compte rendu* du 10 mai 1869 (t. LXVIII, p. 1099), où ce cas est considéré. On voit que le travail de l'éminent Directeur de l'École du Génie maritime ne contredit nullement celui de M. Boussinesq.

Nous dirons peu de choses aussi de ce que contient une dernière Note, intéressante cependant par son sujet, qui est relatif à l'action du frottement intérieur des liquides dans le phénomène des ondes périodiques. Si le coefficient de ce frottement n'est que ce qu'il a été dans les mouvements *réguliers* qui avaient lieu dans les expériences de

M. Poiseuille, cette force ne change sensiblement rien aux équations différentielles *indéfinies* relatives aux points de l'intérieur de la masse; elle ne modifie que les conditions aux limites. Mais, à cause de sa petitesse, elle agit secondairement et tout au plus à la manière des forces appelées *perturbatrices* dans des phénomènes d'un autre ordre.

Vos Commissaires pensent, en résumé, que M. Boussinesq a traité à un nouveau point de vue, et d'une manière aussi exacte que féconde, le problème intéressant des ondes liquides; qu'il a montré, dans son Mémoire, un remarquable esprit d'invention secondé constamment par l'habileté analytique, et ils vous proposent d'ordonner l'impression de ce travail dans le *Recueil des Savants étrangers*.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

Théorie mathématique des machines à air chaud;

Par M. J. BOURGET,

Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

INTRODUCTION.

Les machines à vapeur jouent à notre époque un rôle si important dans l'industrie, que l'étude de leurs perfectionnements, et surtout des moyens de réduire leur dépense, occupera encore longtemps les habiles constructeurs.

Sans doute, on peut dire que les houillères les alimenteront toujours; mais n'est-il pas évident aussi que la multiplication des moteurs à feu et la difficulté que présentera l'extraction du combustible à de grandes profondeurs doivent faire hausser peu à peu le prix du charbon. On conçoit donc tout l'intérêt qui s'attache aux recherches ayant directement pour but d'amoindrir la dépense des machines, si elles peuvent aboutir à doubler seulement la force industrielle pour la même consomation de houille, et à plus forte raison si elles parvenaient à quintupler cette puissance, comme la théorie l'indique. Nous ne parlons pas de l'importance énorme de cette économie pour la navigation à vapeur.

Il est possible de montrer *à priori* que ce problème peut être étudié, et que sa solution n'est pas impossible. En réfléchissant au rôle de la vapeur dans les machines, on ne tarde pas à se convaincre qu'elle doit être considérée comme un intermédiaire à l'aide duquel la chaleur engendre le travail mécanique. Le véritable moteur, c'est donc le calorique, qui, en produisant l'expansion des molécules d'eau, met en mouvement le piston de la machine.

A ce point de vue, les moteurs à vapeur paraissent bien loin encore de leur perfection théorique. Prenons comme exemple une locomo-

tive. On sait que la vapeur arrive sous le piston à 8 atmosphères et à 172 degrés; elle possède alors environ 722 calories par kilogramme. Après avoir travaillé, la vapeur sort à 100 degrés, contenant encore 650 calories. On voit donc que 72 calories seulement ont été employées à produire un effet mécanique; la machine n'a donc rendu que 72 pour 722, ou à peu près 10 pour 100. Ajoutons que, sur les $\frac{10}{100}$ employés, la moitié est consommée inutilement par les résistances passives. Les machines à condensation sont moins imparfaites; car elles recueillent une partie du calorique sortant de la machine; mais la quantité d'eau froide du condenseur doit toujours être assez considérable pour que la température ne s'élève pas à 100 degrés, et, par suite, l'on ne restitue au générateur qu'une très-faible partie du calorique perdu. Le plus grand avantage de la condensation est d'annuler à peu près la contre-pression, et de donner à la pression motrice une valeur plus forte de 1 atmosphère.

On peut apercevoir, par d'autres considérations, l'imperfection des machines à vapeur. On sait que les meilleures machines usuelles dépensent environ 2 kilogrammes de houille par cheval et par heure; on en déduit que 2 kilogrammes de charbon produisent 270000 kilogrammètres. Or 1 kilogramme de charbon équivaut à 6000 calories environ : donc 12000 calories produisent 270000 kilogrammètres. Mais nous démontrerons plus loin que 1 calorie équivaut à 424 kilogrammètres au moins; donc nous pouvons dire que, dans une bonne machine à vapeur, $12000 \times 424 = 5\,088\,000^{\text{kgm}}$, mis au foyer, rendent 270000 kilogrammètres, ou environ 5,5 pour 100. Si l'on fait abstraction des pertes inévitables de chaleur par le foyer, on voit encore que le rendement du travail fourni à la machine par le calorique donné à l'eau est de 10 pour 100 environ.

En résumé, les machines à vapeur sont très-imparfaites, parce que, indépendamment des pertes inévitables dues au rayonnement, à la conductibilité des organes et au foyer, qui ne transmet au corps chauffé que la moitié environ du calorique renfermé dans le charbon, elles consomment inutilement une énorme quantité de combustible en sus de la quantité strictement nécessaire à l'effet à produire.

Nous avons dit plus haut que l'eau, la vapeur ne sont que des intermédiaires à l'aide desquels le calorique, le véritable moteur, agit sur

le piston; le perfectionnement des machines thermodynamiques se présente donc aux yeux du théoricien sous un aspect fort large. Il ne s'agit plus seulement de trouver quelque combinaison d'organes propres à tirer de la vapeur d'eau un parti plus avantageux; on peut se demander si l'emploi de quelque autre intermédiaire ne permettrait pas d'atteindre plus facilement le même but.

Constatons d'abord que l'eau présentera toujours, quoi qu'on fasse, un inconvénient, si l'on en renouvelle la provision. La température moyenne de l'eau est à peu près 10 degrés, au moment où elle est introduite dans les moteurs ordinaires sans condensation; il faut la porter à 100 degrés pour la volatiliser, sous la pression atmosphérique; donc 90 calories, par kilogramme d'eau, sont inutilement dépensées pour atteindre cette température d'ébullition. C'est là une perte de calorique notable que l'emploi de l'eau ne permet pas d'éviter. La condensation amoindrit cette perte sans l'anéantir; car on peut se servir de l'eau de condensation pour alimenter la chaudière.

Plusieurs praticiens, frappés des imperfections que nous venons de signaler, ont pensé qu'en faisant circuler toujours la même vapeur dans l'intérieur des organes, on créerait une machine parfaite, puisqu'il n'y aurait plus que les pertes inévitables dues au rayonnement, à la conductibilité et au foyer. MM. Seguin aîné, Siemenns et Lamy, de Clermont-Ferrand, ont réussi à faire passer cette idée du domaine de la spéculation dans celui de la pratique. Toutefois une difficulté se présente dans l'application. Après avoir agi, la vapeur a une force notable de ressort; pour l'amoindrir et permettre à celle que produit le retour du piston de pousser avec une force suffisante, on a muni les machines à circulation de réfrigérants qui enlèvent en pure perte le calorique latent de la première vapeur; et l'on peut dire, jusque aujourd'hui, que ces machines sont peu avantageuses et encombrantes relativement.

D'autres constructeurs, s'attachant à recueillir utilement la chaleur latente de la vapeur à sa sortie, ont cherché à combiner une machine à eau avec une autre à liquide plus facilement volatil, tel que l'éther ou le chloroforme. Nous pensons que la complication inhérente à cet accouplement, le danger du maniement de ces liquides et aussi le peu de force de leurs vapeurs ont démontré que cette solution

du problème est loin d'être aussi avantageuse qu'on l'avait espéré d'abord.

Il ne faut pas s'étonner, du reste, de ce que les tentatives de perfectionnement des machines à feu n'ont pas toujours eu le succès qu'on attendait. L'histoire de l'industrie montre clairement que les grandes inventions mécaniques ont été presque toujours précédées par la découverte de lois expérimentales propres à guider les constructeurs. L'illustre Watt a préparé ses grandes améliorations de la machine primitive de Newcomem par des études purement spéculatives sur la vapeur. Or, en envisageant l'état actuel de la physique à l'endroit des vapeurs, nous voyons que les lois de ces fluides sont encore peu connues. Comment la pression, le volume et la température varient-ils pendant la détente? Quelle est la liaison entre la température et la force élastique de la vapeur saturée? Comment varie la densité? Quelle est la capacité calorifique à pression constante, à volume constant? Quel est le coefficient de dilatation? A quelques-unes de ces questions, la physique répond par des formules empiriques; devant les autres, elle reste à peu près muette. Aussi la théorie mathématique des machines à vapeur est-elle peu avancée; et loin de guider les ingénieurs par ses résultats, elle se borne à chercher de nouvelles formules empiriques simples donnant des règles sûres pour reproduire les meilleurs systèmes d'installation consacrés par l'expérience.

Dans cet état d'imperfection de la théorie des vapeurs, il nous a paru convenable d'envisager le problème des moteurs thermodynamiques sous une nouvelle face. Nous avons dit plus haut que le véritable moteur de ces machines est le calorique. Puisque son action sur l'eau est mal connue, changeons d'intermédiaire et prenons un gaz permanent, tel que l'air atmosphérique, pour véhicule de la chaleur. Les lois des gaz permanents chauffés ont été étudiées avec soin, et les travaux accumulés et concordants de MM. Mariotte, Dulong, Gay-Lussac, Regnault, etc., ont donné à ces lois une certitude mathématique, et fourni à l'expérimentation des coefficients suffisamment exacts pour tous les besoins. On peut donc attaquer le problème des machines à air chaud dans tous ses détails et chercher les diverses manières dont on peut utiliser l'expansion des gaz, eu égard aux divers besoins. Dans cette étude, rien d'arbitraire, rien d'empirique; et si les

diverses combinaisons que nous indiquerons pour tirer parti de l'air chaud sont difficiles à réaliser, la théorie n'en précédera pas moins la pratique, pour marquer d'une manière précise le but à atteindre dans chaque cas.

Parmi tous les gaz permanents, il convient de prendre l'air atmosphérique. Il est évidemment l'intermédiaire le plus avantageux à essayer. Partout il est à notre disposition. Une machine à air n'a pas de provision de véhicule à emporter, pas de chaudière énorme, dangereuse. Elle se trouve à peu près réduite à l'organe moteur et aux organes secondaires à l'aide desquels elle s'alimente elle-même. Les locomotives à air n'ont pas à traîner avec elles les poids morts énormes qui embarrassent les locomotives à vapeur, et c'est peut-être avec elles qu'on rendra pratique la traction par les moteurs à feu sur les routes ordinaires, ainsi que l'a fait remarquer depuis longtemps M. Burdin [*].

Dans ce Mémoire, je me propose de traiter la partie théorique des machines à gaz chauffés, de manière à répondre à tous les besoins de l'industrie, si elle cherche jamais à tenter la substitution indiquée par M. Burdin. Je n'entrerai dans aucun détail pratique, je n'essayerai pas d'indiquer les moyens de réalisation, ce sujet n'étant pas de ma compétence. Mon but unique est de servir de guide aux praticiens, en leur montrant les résultats qu'il est possible d'obtenir et les limites qu'on ne saurait franchir.

Ce Mémoire résume ceux que j'ai présentés à l'Institut, à diverses époques [**].

---

[*] *Annales des Mines*, 1835, p. 471. — *Comptes rendus de l'Académie*, 23 avril 1836. — *Comptes rendus de l'Académie*, 30 octobre 1837.

[**] *Comptes rendus de l'Académie*, t. XLV, p. 742 et 1069.

PREMIÈRE PARTIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES. — LOIS DES GAZ PERMANENTS.

§ I. — *Gaz permanents.*

Nous nommerons *gaz permanents* ceux qui résistent à de très-fortes pressions sans se liquéfier, et dont les hautes températures n'altèrent pas la constitution. Tels sont l'hydrogène, l'oxygène, l'azote, l'air atmosphérique, etc. On connaît la densité de ces gaz à zéro, et sous la pression de $0^{m},76$ de mercure. En particulier, l'air pèse $1^{kg},293$ par mètre cube dans ces conditions.

§ II. — *Loi de Mariotte.*

Les gaz permanents sont soumis à une loi remarquable dont voici l'énoncé :

Les volumes occupés par une masse gazeuse, dont la température est invariable, sont en raison inverse des pressions qu'elle supporte.

Cette loi porte le nom du physicien Mariotte, qui l'a découverte vers 1650. Son exactitude a été vérifiée en 1829 par Dulong et Arago, jusqu'à la pression de 29 atmosphères, pour l'air seulement. M. Regnault, par une série de nouvelles expériences, a montré que cette loi n'est pas, comme on le croyait, mathématiquement vraie, mais qu'on peut négliger, dans les applications, la différence insignifiante entre les volumes qu'elle donne et ceux que l'observation ferait connaître. Nous supposerons dans ce qui va suivre qu'elle est rigoureusement exacte. On peut remarquer que cette hypothèse est vraie dans un intervalle de pressions peu différentes, intervalle différentiel dans le domaine des applications industrielles.

Désignons par p la pression d'un gaz. La même lettre désignera sa force élastique, car nous la supposerons toujours équilibrée par la pression extérieure, comme si le gaz était renfermé dans un cylindre fermé par un piston mobile d'un poids égal à la force élastique. Nous admettrons que cette pression est exprimée en kilogrammes et rappor-

tée au mètre carré. Nous nommerons v le volume exprimé en mètres cubes. La loi de Mariotte peut se formuler par l'égalité suivante :

$$(1) \qquad pv = \text{const.} = m.$$

Si, pour faire image, nous portons les volumes comme abscisses sur une horizontale et les pressions comme ordonnées, nous voyons que la succession des états d'une masse gazeuse satisfaisant à l'équation (1) dessine une hyperbole ayant l'horizontale OV et la verticale OP comme azymptotes. Tous les points de cette hyperbole correspondent à des états différents par la pression et le volume, mais non par la température. Cette courbe peut donc être appelée *courbe de détente ou de compression sans variation de température*. Nous lui donnerons le nom de *courbe isothermique*.

§ III. — *Loi de Gay-Lussac*.

La chaleur dilate les gaz. Gay-Lussac a déterminé la loi de cette dilatation. Il a montré que

L'augmentation de volume d'un gaz pris à zéro est proportionnelle à la température, la pression restant la même.

D'après cela, si nous nommons :

v_0 le volume d'une masse gazeuse à zéro;
t la température nouvelle à laquelle nous la portons;
v le volume à t degrés;
α le coefficient de dilatation, ou l'augmentation d'un mètre cube pour 1 degré à partir de zéro,

nous aurons

$$v = v_0 + v_0\alpha t = v_0(1 + \alpha t).$$

La quantité $(1 + \alpha t)$ se nomme le *binôme de dilatation*. Comme elle revient souvent dans les calculs, nous la désignerons par une seule lettre, B, et nous aurons

$$(2) \qquad v = v_0 B$$

et

$$(3) \qquad B = 1 + \alpha t.$$

On peut remarquer que si v et v' désignent les volumes d'une même masse à t^0 et à t'^0, on aura

$$v = v_0 B, \qquad v' = v_0 B';$$

donc, sous la même pression,

$$(4) \qquad \frac{v}{v'} = \frac{B}{B'}.$$

Le nombre α est sensiblement le même pour tous les gaz permanents; pour l'air

$$(5) \qquad \alpha = 0{,}00367,$$

il reste le même à toute pression et à toute température.

M. Regnault a montré, par ses longues et importantes études sur la dilatation, que cette invariabilité n'est pas mathématique, mais qu'elle peut être admise sans erreur dans les applications industrielles.

Remarque. — La formule de Gay-Lussac n'est pas l'expression de la loi véritable de la dilatation, car s'il en était ainsi, en posant

$$t = -\frac{1}{\alpha} = -273^\circ,$$

le volume du gaz s'annulerait, ce qui paraît inadmissible. Donc on a véritablement

$$v = v_0\,\varphi(t),$$

et en développant en série

$$\varphi(t) = 1 + \alpha t + \varphi''(0)\frac{t^2}{2} + \ldots;$$

mais $\varphi''(0)$, $\varphi'''(0)$,... sont sensiblement nuls.

La densité d'une masse gazeuse est évidemment en raison inverse

de son volume; donc, en nommant D et D′ les densités aux températures respectives t et t', nous aurons

$$(6)\qquad DB = D'B';$$

par suite,

$$(7)\qquad D = \frac{D_0}{B} = \frac{D_0}{1+\alpha t}.$$

Cette formule est d'un fréquent usage.

§ IV. — *Combinaison des lois de Mariotte et de Gay-Lussac.*

La loi de Mariotte suppose que le gaz garde la même température; celle de Gay-Lussac, qu'il garde la même pression. Considérons maintenant le cas plus général où une masse gazeuse passerait de l'état (p, v, t) à l'état (p', v', t'). Nous pouvons lier ces deux états l'un à l'autre à l'aide d'une équation qui résulte des deux lois précédentes. Ramenons les gaz à la même température, à zéro par exemple. Le volume v deviendra $\frac{v}{B}$, et le volume v' deviendra $\frac{v'}{B'}$. Maintenant, appliquons la loi de Mariotte : nous aurons

$$\frac{pv}{B} = \frac{p'v'}{B'}.$$

Nous supposerons, dans le cours du Mémoire, que la masse gazeuse modifiée est celle d'un mètre cube prise à zéro, et sous la pression $0^{m},76$. Rapportons cette pression au mètre carré, et exprimons-la en kilogrammes; elle deviendra

$$H = 10\,333^{kg} \text{ environ.}$$

Si maintenant, dans la formule ci-dessus, nous faisons

$$t' = 0,\quad v' = 1,\quad p' = H,$$

elle donne

$$pv = BH = H(1 + \alpha t). \tag{8}$$

On voit, par cette équation, que les deux éléments p, v définissent complétement l'état de la masse gazeuse considérée; car elle permet de trouver t, quand p et v sont connus. Nous avons déjà vu que ces deux quantités peuvent être regardées comme déterminant un point sur un plan POV; le point (p, v) peut être, par suite, appelé l'*état* de la masse gazeuse.

Une équation

$$p = \varphi(v)$$

définit une série continue d'états par une courbe tracée sur le même plan. Nous nommerons *cycle d'états* une courbe fermée quelconque marquant une série d'états par lesquels une masse gazeuse passe et revient à son état primitif.

§ V. — *Chaleur spécifique. — Capacité calorifique.*

On nomme *chaleur spécifique* ou *capacité calorifique* la quantité de chaleur nécessaire pour échauffer d'*un* degré centigrade 1 kilogramme de gaz. On prend pour unité de chaleur la *calorie*, c'est-à-dire la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré la température d'*un* kilogramme d'eau.

La question des capacités calorifiques des gaz peut être envisagée sous un double point de vue. On peut chauffer la masse gazeuse en lui permettant de se dilater librement; la pression reste constante pendant cette opération. On nomme c la capacité calorifique à pression constante. On peut aussi supposer le gaz renfermé dans une enveloppe inextensible pendant l'échauffement; son volume reste invariable, la pression seule change. On nomme c' la capacité calorifique à volume constant.

M. Regnault a étudié avec beaucoup de soin les capacités des gaz; il a montré que c ne dépend ni de la température ni de la pression,

et il a trouvé, pour l'air atmosphérique.

$$c = 0,2377.$$

La quatrième figure est douteuse. Ce nombre n'est pas le même pour tous les gaz; mais M. Regnault a vérifié que l'on a sensiblement, pour tous les gaz permanents,

$$(9) \qquad D_0 c = \text{const.} = 0,307 \text{ environ,}$$

D_0 étant le poids spécifique du gaz à zéro. Cette loi est due à Dulong.

Le nombre c' est plus difficile à déterminer; ce n'est qu'indirectement qu'on peut y arriver. Les expériences de Gay-Lussac et Welter, les expériences beaucoup plus récentes de Masson et de M. Cazin montrent que ce coefficient est à peu près indépendant de la pression et de la température. Toutefois, cette conclusion repose sur des bases encore incertaines, parce que les limites des températures et des pressions entre lesquelles les expériences ont été faites sont peu éloignées. Nous admettrons ici l'invariabilité de c', et nous poserons

$$(10) \qquad \gamma = \frac{c}{c'} = 1,41.$$

C'est le nombre trouvé par MM. Masson et Cazin.

Nous rappellerons que la dépense de chaleur pour faire passer une masse gazeuse de la température t à la température t', sans que sa pression change, est

$$\mathrm{P}c(t' - t),$$

en nommant P son poids. Si le volume est invariable, la dépense est

$$\mathrm{P}c'(t' - t) = \frac{\mathrm{P}c}{\gamma}(t' - t).$$

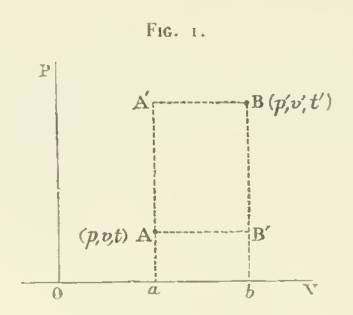
Ces formules supposent l'invariabilité absolue de c et de c' dans l'intervalle $t' - t$. Toutefois, comme l'expérience a démontré qu'ils sont sensiblement invariables dans une petite étendue de l'échelle des pressions et des températures, on peut regarder ces formules comme parfaitement exactes, si $(t' - t)$ est suffisamment petit.

§ VI. — *Dépense de chaleur pour passer d'un état à un autre quelconque.*

Prenons la masse gazeuse à l'état A(p, v, t), et cherchons la chaleur qu'il faut dépenser pour la faire passer à l'état B(p', v', t').

Nous pouvons suivre deux chemins différents; car nous pouvons chauffer d'abord à volume constant et amener le gaz en A' (*fig.* 1) à la pression p' qu'il aura en B, puis chauffer à pression constante jusqu'à ce qu'il ait le volume v'. Nous aurons ainsi suivi la série des états AA'B.

Fig. 1.



Nous pouvons encore chauffer d'abord à pression constante jusqu'à ce que le gaz ait pris le volume v' qu'il doit avoir en B, et puis chauffer à volume constant jusqu'à ce que la pression p' soit atteinte; le chemin des états suivi sera dans ce cas AB'B.

La température θ à l'état A' sera donnée par la relation

$$p'v = \mathrm{H}(1 + \alpha\vartheta),$$

et la température ϑ' à l'état B' par la relation

$$pv' = \mathrm{H}(1 + \alpha\vartheta').$$

Cela posé, nous aurons les résultats suivants :

1° Pour amener le gaz de l'état A à l'état A', la dépense de chaleur sera

$$q = \mathrm{D}_0 c'(\vartheta - t) = \frac{\mathrm{D}_0 c'}{\mathrm{H}\alpha} v(p' - p);$$

2° Pour amener le gaz de A′ à B, la dépense sera

$$q_1 = D_0 c(t' - \theta) = \frac{D_0 c}{H\alpha} p'(v' - v);$$

3° Pour amener le gaz de A à B′, la dépense sera

$$q' = D_0 c(\theta' - t) = \frac{D_0 c}{H\alpha} p(v' - v);$$

4° Pour amener le gaz de B′ à B, la dépense sera

$$q'_1 = D_0 c'(t' - \theta') = \frac{D_0 c'}{H\alpha} v'(p' - p).$$

Donc la dépense totale le long du chemin AA′B sera

$$Q = q + q_1 = \frac{D_0}{H\alpha}[cp'(v' - v) + c'v(p' - p)],$$

et la dépense totale le long du chemin AB′B sera

$$Q' = q' + q'_1 = \frac{D_0}{H\alpha}[cp(v' - v) + c'v'(p' - p)].$$

Ces deux quantités ne sont pas les mêmes, car leur différence

$$Q - Q' = \frac{D_0}{H\alpha}(c - c')(p' - p)(v' - v)$$

ne peut être nulle, à moins que l'on n'ait $p' = p$ ou $v' = v$, ce que nous ne supposons pas. Nous arrivons donc à cette conclusion remarquable :

Théorème. — *Pour faire passer une masse gazeuse d'un état* (p, v) *à un autre* (p', v') *différent, la dépense de chaleur ne dépend pas seulement de l'état initial et de l'état final, elle dépend encore des états intermédiaires.*

Remarque. — Cette vérité est, comme l'on voit, un corollaire très-simple des lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et de l'invariabilité des chaleurs spécifiques; on peut même dire qu'elle ne dépend que des deux premières lois, en admettant que les deux états A et B soient

suffisamment voisins. Nous avons signalé ce résultat pour la première fois dans un Mémoire qui fait partie des *Annales de Chimie et de Physique* (t. LVI, 1859). Ce théorème fait apercevoir immédiatement cette autre vérité, que la chaleur dépensée n'est pas tout entière absorbée par le gaz, comme on le croyait autrefois; car, s'il en était ainsi, on devrait dépenser la même quantité de chaleur pour amener un gaz d'un état à un autre, quelle que fût la route suivie.

§ VII. — *Démonstration élémentaire de la loi de la transformation de la chaleur en travail mécanique.*

Après avoir fait passer le gaz de l'état A à l'état B, en suivant le chemin AA′B, la dépense de chaleur est

$$(11)\qquad Q = \frac{D_0}{H\alpha}[cp'(v'-v) + c'v(p'-p)].$$

Ramenons maintenant le gaz au premier état par le chemin BB′A, nous recueillerons la quantité de chaleur

$$(12)\qquad Q' = \frac{D_0}{H\alpha}[cp(v'-v) + c'v'(p'-p)].$$

Donc, après le parcours du cycle d'états AA′BB′A, la dépense de chaleur est

$$(13)\qquad Q - Q' = \frac{D_0}{H\alpha}(c-c')(p'-p)(v'-v).$$

Cette quantité n'est pas nulle; donc, quoique le gaz ait été ramené à son état primitif, une certaine quantité de la chaleur dépensée a été *anéantie*, a *disparu*. Voilà une conclusion certaine qui découle des lois de Mariotte et de Gay-Lussac, qui y est implicitement contenue.

Mais, d'un autre côté, observons qu'une certaine quantité de travail mécanique a été produite. En effet, dans le passage de A′ à B, le travail moteur produit par l'expansion du gaz a été

$$\tau = p'(v'-v),$$

si, pour fixer les idées, nous imaginons toujours le gaz renfermé dans un cylindre d'un mètre carré de section sous un piston équilibré. Dans le passage de B′ à A, le volume a diminué; le travail résistant du gaz a été

$$\tau_1 = p(v' - v).$$

Pendant les autres modifications de l'état du gaz, le volume est resté invariable; donc il n'y a pas eu de travail. Donc, en résumé, pendant le parcours du cycle d'états AA′BB′A, le gaz a servi à produire une quantité de travail mécanique

$$(14) \qquad \tau = (p' - p)(v' - v)$$

mesurée par la surface du rectangle formée par le cycle. Donc :

Théorème. — *S'il y a une certaine quantité de chaleur anéantie dans le parcours d'un cycle fermé rectangulaire, il y a en même temps création d'une quantité proportionnelle de travail mécanique.*

En d'autres termes :

Théorème. — *Quand on fait passer un gaz par une série d'états formant un circuit fermé rectangulaire, tout se passe comme si la chaleur se transformait en travail mécanique par équivalents. On voit disparaître, s'anéantir une certaine quantité de chaleur, et l'on voit créée à la place une quantité proportionnelle de travail mécanique.*

Des relations ci-dessus on tire

$$(15) \qquad Q - Q' = \frac{D_0(c - c')}{H\alpha}\tau;$$

donc

$$(16) \qquad \frac{\tau}{Q - Q'} = E = \frac{H\alpha}{D_0(c - c')} = \frac{H\alpha}{D_0 c\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)}.$$

Or la quantité E (16) est le travail correspondant à une calorie perdue; nous pouvons donc le désigner sous le nom d'*équivalent mécanique de la chaleur*. Nous arrivons ainsi à l'expression de l'équivalent en fonction de coefficients numériques connus, et sans nous appuyer sur d'autres

lois que celles de Mariotte, de Gay-Lussac et de Dulong. Réduisons en nombres la formule qui donne E; en posant :

$$\begin{aligned} D_0 &= \overset{\text{kg}}{1,293}, \\ H &= 10333^{\text{kg}}, \\ c &= 0,2377, \\ \gamma &= 1,41, \\ \alpha &= 0,003665, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$E = 425. \tag{17}$$

Le dernier chiffre est douteux, eu égard à l'incertitude de γ. Nous pouvons dire que l'équivalent mécanique de la chaleur est compris entre 420 et 430. Cette détermination théorique, qu'il est impossible d'attaquer sans mettre en doute les parties les mieux étudiées de la Physique, peut servir de contrôle à toutes les déterminations expérimentales faites directement. Elle s'accorde parfaitement avec les moyennes des expériences de Joule qui ont donné 424,5, et avec d'autres résultats trouvés en France par MM. Favre, Quintus Icilius, Seguin, etc., et en Allemagne par MM. Clausius, Boscha, etc.

Remarque I. — Pendant longtemps, et l'on peut même dire jusqu'à la découverte de Joule, la chaleur était regardée comme un fluide interposé entre les molécules des corps. La dilatation résultant de cette interposition produisait du travail, mais on pensait que le travail produit n'avait aucune liaison intime avec le calorique dépensé pour dilater le corps. Les résultats de nos calculs montrent clairement que cette hypothèse est inexacte, qu'il y a entre le travail et le calorique un rapport si intime, qu'ils peuvent être regardés comme choses homogènes, pouvant se transformer l'un dans l'autre par équivalents. Montgolfier, le premier, paraît avoir eu cette idée; son neveu Seguin l'avait indiquée, en 1829, dans un ouvrage sur les chemins de fer; M. Joule en a démontré l'exactitude par des expériences justement célèbres, et il a pu tirer de ces expériences une détermination approchée de l'équivalent mécanique de la chaleur. Nous croyons avoir montré avant tout autre, en 1857, que cette loi de transformation est

implicitement contenue dans celles de Mariotte, de Gay-Lussac et de Dulong, lois purement expérimentales, trouvées sans préoccupations des théories nouvelles sur la chaleur. Ce n'est donc plus une hypothèse, mais une loi aussi certaine que celles dont elle découle.

La démonstration que nous venons d'en donner est élémentaire et peut entrer dans les Traités de physique destinés aux élèves des lycées; voilà pourquoi nous l'avons longuement développée. Mais elle est incomplète; car, pour passer d'un état à un autre, nous suivons un chemin particulier. Nous allons la généraliser.

§ VIII. — *Démonstration générale de la transformation de la chaleur en travail.*

Considérons deux états infiniment voisins de notre masse gazeuse, c'est-à-dire supposons

$$v' = v + dv, \quad p' = p + dp;$$

les dépenses (11) et (12) de chaleur deviennent

(18) $$Q = \frac{D_0}{H\alpha}[c'v\,dp + cp\,dv + c\,dp\,dv],$$

et

(19) $$Q = \frac{D_0}{H\alpha}[c'v\,dp + cp\,dv + c'dp\,dv].$$

Ces deux quantités ne diffèrent que par le terme du second ordre

$$\frac{D_0}{H\alpha}(c - c')\,dp\,dv.$$

Donc, si nous devons prendre Q ou Q' comme éléments d'intégrales définies, nous pouvons négliger dans chacune la partie du second ordre et les réduire à la quantité du premier ordre, que nous nommerons dQ. D'où l'on peut conclure que la dépense de chaleur néces-

saire pour faire passer la masse gazeuse d'un état pv à un autre infiniment voisin est

(20) $$dQ = \frac{D_0}{H\alpha}[c'v\,dp + cp\,dv],$$

ou bien

(21) $$dQ = \frac{D_0 c}{H\alpha}\left[\frac{1}{\gamma}v\,dp + p\,dv\right].$$

Soient maintenant deux états quelconques A et B. Cherchons la dépense de chaleur à faire pour passer de A à B en suivant une courbe quelconque d'états successifs donnée par l'équation

(22) $$p = \varphi(v).$$

Il nous suffit d'intégrer la formule (20) depuis $v = v_0$, qui correspond au point A, jusqu'au point $v = V$, qui correspond au point B; il vient ainsi

(23) $$Q = \frac{D_0}{H\alpha}\int_{v_0}^{V}(c'v\,dp + cp\,dv);$$

en intégrant par parties, on peut lui donner la formule suivante :

(24) $$Q = \frac{D_0}{H\alpha}\left[c'(VP - v_0 p_0) + (c - c')\int_{v_0}^{V} p\,dv\right].$$

Remarque I. — La formule (20) serait encore vraie dans le cas où c et c' dépendraient de p et de v; donc aussi la formule (23). En effet, dans le passage d'un état à un autre infiniment voisin, les variations de c' et de c n'altéreraient dQ que de quantités infiniment petites du second ordre.

Remarque II. — Si nous suivions le chemin AB en sens contraire, nous recueillerions évidemment la quantité de chaleur dépensée pour aller de A à B. Or la formule de la dépense deviendrait

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha}\int_{V}^{v_0}(c'v\,dp + cp\,dv),$$

ou

$$Q = -\frac{D_0}{H\alpha}\int_{v_0}^{V}(c'v\,dp + cp\,dv),$$

et le résultat obtenu serait négatif. Donc, si nous convenons qu'une quantité de chaleur dépensée *négative* représente une quantité de chaleur *recueillie*, nous pouvons nous servir des formules (23) et (24) dans tous les cas pour trouver la quantité de chaleur dépensée ou recueillie dans le passage d'un état à un autre.

Considérons maintenant un circuit fermé quelconque compris entre deux courbes

$$p = \varphi(v), \quad p_1 = \varphi_1(v),$$

et les deux ordonnées correspondantes aux volumes v_0 et V.

Ce circuit sera ABB_1A_1A, soit AB la courbe supérieure.

Nous aurons, pour les quantités de chaleur dépensées,

de A à B,

$$\frac{D_0}{H\alpha}\left[c'(VP - v_0 p_0) + (c - c')\int_{v_0}^{V} \varphi(v)\,dv\right];$$

de B à B_1,

$$-\frac{D_0}{H\alpha}[c'VP - c'VP'];$$

de B_1 à A_1,

$$-\frac{D_0}{H\alpha}\left[c'(VP' - v_0 p'_0) + (c - c')\int_{v_0}^{V} \varphi_1(v)\,dv\right];$$

de A_1 à A,

$$\frac{D_0}{H\alpha}[c'v_0 p_0 - c'v_0 p'_0].$$

Donc la quantité totale de chaleur dépensée dans le parcours du circuit fermé ABB_1A_1A sera

$$(25) \qquad \mathfrak{Q} = \frac{D_0(c - c')}{H\alpha}\int_{v_0}^{V}[\varphi(v) - \varphi_1(v)];$$

mais la surface du quadrilatère curviligne ABB_1A_1A vaut

$$(26) \qquad \mathfrak{s} = \int_{v_0}^{V}[\varphi(v) - \varphi_1(v)]\,dv,$$

donc

$$(27) \qquad \mathfrak{Q} = \frac{D_0(c - c')}{H\alpha} \mathcal{S}.$$

De l'équation (27) nous concluons le théorème suivant :

Théorème. — *Dans le parcours d'un circuit fermé quelconque d'états, la quantité de chaleur anéantie ou créée par l'intermédiaire du gaz est proportionnelle à l'aire du circuit parcouru.*

Remarquons maintenant que le travail moteur effectué par l'intermédiaire du gaz est donné par la formule

$$\mathfrak{E} = \int_{v_0}^{V} [\varphi(v) - \varphi_1(v)]\, dv = \mathcal{S};$$

car, dans le parcours des lignes BB_1, A_1A, le volume ne changeant pas, le gaz ne travaille pas. Remarquons aussi que le travail, au lieu d'être *moteur*, deviendrait *résistant*, si le gaz parcourait en sens contraire le circuit des états successifs; donc nous pouvons énoncer les principes généraux suivants :

Théorème. — *Dans le parcours d'un circuit d'états fermé quelconque, il y a anéantissement ou création de chaleur proportionnellement au travail moteur ou résistant effectué par le gaz.*

Ou bien encore :

Théorème. — *Si un gaz passe par une série d'états et revient par un cycle fermé à l'état primitif, une certaine quantité de la chaleur dépensée a disparu, si le gaz a servi à effectuer une certaine quantité de travail. La quantité de calories disparues est proportionnelle au nombre de kilogrammètres effectués à raison de*

$$E = \frac{H\alpha}{D_0(c - c')} = 245^{\text{kgm}} \text{ environ}$$

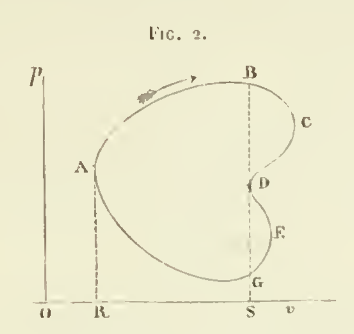
par calorie.

Dans le cas où le travail du gaz a été résistant, c'est-à-dire où une certaine quantité de travail extérieur a été consommée par les changements d'état du gaz, on trouve qu'une quantité proportionnelle de calories a été créée.

Remarque I. — Si l'on représente, comme nous l'avons fait, la série des états par une ligne, en prenant les volumes pour abscisses et les pressions pour ordonnées, on voit qu'il y a transformation de chaleur en travail si le circuit est parcouru dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, et transformation de travail en chaleur quand le circuit est parcouru en sens contraire.

Remarque II. — Notre démonstration semble particulière, mais il est facile de l'étendre à un circuit fermé de forme quelconque, fût-il même

Fig. 2.



rentrant. Menons l'ordonnée AR (*fig.* 2) par le point A le plus rapproché de Op, et si le circuit est rentrant partageons-le en d'autres qui ne le soient pas, ou tels, qu'en suivant chacun d'eux on s'éloigne ou l'on se rapproche de Op sans alternatives, comme dans la figure ci-dessus. En parcourant le circuit ABDGA, il y a perte de chaleur proportionnelle à l'aire de ce circuit; en parcourant BCDB, il y a perte de chaleur proportionnelle à l'aire du nouveau circuit; enfin, en parcourant DEGD, il y a perte de chaleur proportionnelle à l'aire du circuit parcouru. Mais, si l'on parcourt successivement tous ces circuits, on a suivi la totalité du circuit donné et parcouru deux fois, mais en sens inverse, les lignes BD et DG; donc ce chemin auxiliaire n'influe en rien sur la quantité de chaleur anéantie ou créée dans le cours des opérations, et l'on peut dire encore que la quantité de chaleur perdue ou créée dans le parcours du circuit total est proportionnelle à la surface de ce circuit, c'est-à-dire au travail moteur ou résistant effectué par le gaz.

§ IX. — *Distinction entre la chaleur dépensée et la chaleur transformée.*

Il importe de distinguer avec soin, dans les raisonnements de la Thermodynamique, la chaleur dépensée et la chaleur anéantie, ou mieux transformée en travail.

Considérons deux états A et B d'un gaz; nous avons trouvé (24) que la chaleur *dépensée* pour passer de l'un à l'autre est

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha}\left[c'(VP - v_0 p_0) + (c - c')\int_{v_0}^{V} p\,dv\right].$$

Or le travail effectué par l'intermédiaire du gaz est

$$\mathfrak{T} = \int_{v_0}^{V} p\,dv; \tag{28}$$

donc une calorie dépensée correspond à un travail

$$\frac{\mathfrak{T}\dfrac{H\alpha}{D_0(c-c')}}{\mathfrak{T} + \dfrac{c'}{c-c'}(VP - v_0 p_0)},$$

ou

$$\frac{E}{1 + \dfrac{c'}{c-c'}\dfrac{VP - v_0 p_0}{\mathfrak{T}}}. \tag{29}$$

Donc la dépense d'une calorie correspond à un travail variable toujours moindre que $E = 425^{\text{kgm}}$.

C'est que, dans ce cas, la chaleur dépensée Q n'est pas seulement employée à produire du travail mécanique; elle sert aussi à modifier l'état du gaz. Elle se partage donc en deux parties : l'une qui est consommée, anéantie par le travail, ou transformée en travail; l'autre qui pénètre dans le gaz et modifie son état. Comme nous ne connaissons aucune loi qui sépare ces deux quantités de chaleur, il faut, pour trouver l'équivalent, ramener le gaz à l'état primitif On est bien sûr

alors que la quantité de chaleur disparue est tout entière transformée en travail mécanique. C'est ce qui explique l'emploi des cycles fermés.

C'est faute d'avoir fait la distinction que nous venons de signaler que quelques auteurs sont arrivés à une valeur de l'équivalent différente de celle que nous avons donnée. Nous signalerons en particulier le vice du raisonnement de M. Laboulaye dans son *Dictionnaire technologique* (1re édition, article Calorie), afin de mettre les mécaniciens en garde contre ses conclusions. Cette rectification est d'autant plus nécessaire que M. Laboulaye, pour prouver la bonté du nombre 111 qu'il avait trouvé pour E, a rapporté, dans une Note à l'Académie, des expériences faites avec une sonnette à battre les pieux, qui donneraient, suivant lui, 150 kilogrammètres pour limite supérieure de E [*].

M. Laboulaye considère une masse gazeuse à zéro et sous la pression H; il la chauffe de manière à élever sa température d'*un* degré, puis il la laisse se détendre jusqu'à ce que la température redevienne zéro. Il calcule, d'une part, le calorique dépensé, de l'autre le travail effectué, et, divisant ce dernier par le premier, il croit avoir l'équivalent mécanique de la chaleur. Il y a ici évidemment confusion entre la chaleur dépensée et la chaleur transformée.

M. Destoquois, dans un travail sur le même sujet, a trouvé 170 kilogrammètres pour l'équivalent E; nous n'avons pas pu prendre connaissance de son Mémoire, mais nous pensons que son erreur tient à la même confusion.

Si nous admettons que E soit constant, ce qui semble résulter des expériences de M. Regnault sur les gaz permanents, nous pouvons calculer la chaleur retenue par le gaz et employée au changement d'état. Désignons par Q_1 et Q_2 les deux parties de Q, nous aurons

$$Q_1 + Q_2 = \frac{D.(c - c')}{H\alpha}\left[\frac{c'(VP - v_0 p_0)}{c - c'} + \varpi\right],$$

ou bien

$$(30)\qquad Q_1 + Q_2 = \frac{1}{E}\,\frac{c'(VP - v_0 p_0)}{c - c'} + \frac{\varpi}{E}.$$

---

[*] Depuis, MM. Laboulaye et Tresca ont trouvé 430 kilogrammètres environ pour le même nombre.

Mais la première partie Q_1 est la quantité transformée; donc elle est égale à $\frac{\mathfrak{T}}{E}$ calories, donc la partie Q_2 employée au changement d'état et contenue dans le gaz est donnée par

$$(31) \qquad Q_2 = \frac{1}{E} \frac{c'(VP - v_0 p_0)}{c - c'}.$$

Cette partie s'annule si $VP = v_0 p_0$, et par conséquent si $V = v_0$, $P = p_0$, c'est-à-dire si le cycle des états est fermé.

Mais nous apercevons immédiatement aussi que Q_2 peut s'annuler sans que le cycle des états successifs soit fermé; il suffit que la courbe suivie soit l'hyperbole

$$pv = H(1 + \alpha t) = \text{const.},$$

c'est-à-dire que le gaz se détende en gardant sa température. Désignons cette hyperbole sous le nom expressif de *courbe isothermique*. Quand le gaz suit une courbe isothermique, toute la chaleur qu'on lui donne est transformée en travail.

Cette conclusion est extrêmement remarquable, et, en y réfléchissant, elle tendrait à nous faire douter de l'exactitude mathématique de certaines lois qui nous ont servi de base. Puisqu'en suivant une courbe isothermique, le gaz, dans sa détente, transforme tout le calorique dépensé en travail, il faut admettre que les quantités de chaleur contenues dans les deux états extrêmes sont les mêmes, et que par suite le changement de volume n'exige par lui-même aucun travail; que le travail *interne* consommé par le gaz dans ce changement d'état est absolument nul.

Il semble difficile de croire à l'exactitude absolue de cette loi, et c'est une raison de penser que les lois de Mariotte, de Gay-Lussac et de Dulong sont des lois empiriques approchées, ou au moins que l'une d'entre elles n'est pas parfaitement exacte. Si nous remplacions la loi de Mariotte par une autre

$$pv^{1+\beta} = H(1 + \alpha t),$$

β étant très-voisin de zéro, nous verrions en effet que la conclusion ci-dessus ne serait plus rigoureusement vraie.

§ X. — *Formule de Laplace donnant la loi de la détente des gaz permanents.*

Nous avons vu que la dépense de chaleur nécessaire pour faire passer un gaz permanent de l'état $(p_0 v_0)$ à l'état (PV) le long d'une courbe

$$p = \varphi(v)$$

est

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha} \int_{v_0}^{V} (c' v dp + c p dv).$$

Cherchons la courbe des états successifs qui ne donnerait lieu à aucune dépense. Il faut écrire que l'élément de l'intégrale est constamment nul; en d'autres termes, si nous laissons indéterminée la limite supérieure de l'intégrale, il faut trouver quelle doit être la forme de la fonction φ pour que la fonction primitive Q soit nulle, quel que soit v. La dérivée doit être nulle; donc

$$(32) \qquad c' v \frac{dp}{dv} + c p = 0,$$

et cela suffit pour que Q soit nul, quel que soit v. De là nous déduisons

$$(33) \qquad p v^{\gamma} = \text{const.}$$

Cette équation représente une sorte d'hyperbole ayant les axes pour asymptotes, comme la courbe isothermique. Mais, tandis que cette dernière est symétrique par rapport aux deux axes, la première ne l'est pas. Soit $(p_0 v_0)$ un point commun aux deux courbes, on aura

$$p v^{\gamma} = p_0 v_0^{\gamma},$$

et

$$p v = p_0 v_0$$

pour leurs équations respectives. Pour une abscisse $Ob = v > v_0$, la première donnera l'ordonnée

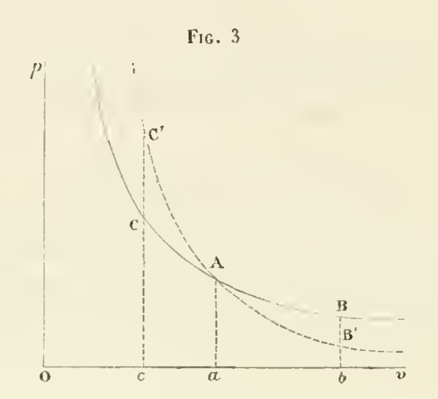
$$B'b = \frac{p_0 v^{\gamma}}{v^{\gamma}} = p_0 \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\gamma};$$

la seconde

$$\mathrm{B}b = \frac{p_0 v_0}{v} = p_0\left(\frac{v_0}{v}\right);$$

mais $\frac{v_0}{v} < 1$; donc $\mathrm{B}'b < \mathrm{B}b$. Donc, au delà de l'ordonnée commune, la courbe de détente libre passe au-dessous de la courbe isothermique; en deçà de l'ordonnée commune, c'est le contraire qui arrive.

Fig. 3



Puisque le long de cette courbe les changements d'état du gaz se font sans dépense et sans soustraction directe de chaleur, cette courbe peut être nommée *courbe de détente libre* ou *de compression libre*.

La formule de Laplace, combinée avec la formule de Mariotte, conduit à deux relations souvent employées. Écrivons les deux équations

$$pv^\gamma = p'v'^\gamma$$

et

$$\frac{pv}{1+\alpha t} = \frac{p'v'}{1+\alpha t'},$$

qui servent à trouver la pression et la température après une détente ou une compression déterminées; nous en déduisons

(34) $$\left(\frac{v}{v'}\right)^{\gamma-1} = \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}$$

et aussi

(35) $$\left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}.$$

Ces équations permettent de trouver deux quelconques des quantités p, v, t, quand on connaît l'autre, dans le cas d'une détente ou d'une compression avec variation libre de température.

Remarque I. — Dans le second volume de sa *Mécanique rationnelle* (p. 647), Poisson arrive aux mêmes formules par une autre voie. En examinant à fond le raisonnement de Poisson, on aperçoit que, dans le système des idées nouvelles, il est erroné, et que sa conclusion n'est exacte que par une compensation d'erreurs. Nous voyons à la page 639 que Poisson regarde le gaz comme absorbant tout le calorique dépensé et la dépense q comme ne dépendant que de l'état initial p_0, ρ_0, θ_0 et de l'état final p, ρ, θ, ce qui est une première erreur, comme nous l'avons démontré. Poisson commet ensuite une autre erreur en admettant que la capacité calorifique c est exprimée par la formule

$$c = \frac{dq}{d\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

En effet, dans le système des idées nouvelles, la chaleur dépensée quand on chauffe un corps sous pression constante se partage en deux parties, dont l'une est absorbée par le corps, et dont l'autre disparaît en se transformant en travail. Ces deux erreurs conduisent Poisson à l'équation aux dérivées partielles

$$\rho\frac{dq}{d\rho} + \gamma p\frac{dq}{dp} = 0,$$

ou, en introduisant le volume à la place de ρ, pour rentrer dans le système de nos notations,

$$(36) \qquad v\frac{dq}{dv} - \gamma p\frac{dq}{dp} = 0,$$

qui, intégrée, donne

$$q = \text{fonct.}(pv^\gamma).$$

Cette équation aux dérivées (36) partielles est fausse; mais, par suite des deux erreurs faites, elle convient à la quantité de chaleur dépensée Q; car de notre relation (20)

$$dQ = \frac{D_0 c'}{H\alpha}(v\,dp + \gamma p\,dv)$$

on déduit que Q, considéré comme fonction de p et de v, satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$v\frac{dQ}{dv} - \gamma p\frac{dQ}{dp} = 0.$$

Mais cette coïncidence est toute fortuite, et si l'équation

$$q = f(pv^\gamma)$$

donne

$$pv^\gamma = \text{const.}$$

pour la courbe qu'il faut suivre pour passer d'un état à un autre sans dépense de chaleur, il n'en faut pas moins conclure que le raisonnement de Poisson est faux, puisqu'il suppose dès le début que la dépense de chaleur ne dépend que de l'état final, une fois l'état initial choisi, et non point du chemin suivi pour passer de l'un à l'autre.

Remarque II. — Nous avons trouvé pour l'élément de dépense de calorique, quand on passe d'un état à un autre infiniment voisin,

$$dQ = \frac{D_0 c'}{H\alpha}(v\,dp + \gamma p\,dv).$$

Cette formule serait encore vraie dans l'hypothèse où c et c' seraient des fonctions de p et de v. Cherchons comment devraient varier ces quatre quantités pour que Q ne dépendît que de l'état final du gaz, ou, en d'autres termes, pour que Q fût indépendant du chemin parcouru. Dans cette hypothèse, Q deviendrait une fonction des deux variables indépendantes p, v; donc on aurait

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = c'v, \quad \frac{\partial Q}{\partial v} = cp;$$

par suite,

$$c' + v\frac{\partial c'}{\partial v} = c + p\frac{\partial c}{\partial p}.$$

Mais M. Regnault a trouvé que c est sensiblement indépendant de la pression; donc on aurait simplement

$$c' + v\frac{\partial c'}{\partial v} = c.$$

L'intégration donnerait

$$c' = c + \frac{\varphi(p)}{v},$$

$\varphi(p)$ étant une fonction de la pression. Si l'on remplace c' par cette valeur dans dQ, on obtient

$$dQ = \frac{D_0}{H\alpha}\left[c(v\,dp + p\,dv) + \varphi(p)\,dp\right],$$

d'où

$$Q = \frac{D_0 c}{H\alpha} pv + \frac{D_0}{H\alpha}\int \varphi(p)\,dp + \text{const.};$$

ou bien, en mettant pour v sa valeur en t tirée de la formule $pv = H(1 + \alpha t)$,

$$Q = D_0 ct + \frac{D_0}{H\alpha}\Psi(p) + A,$$

Ψ étant une certaine fonction à déterminer par l'expérience, et A une constante qui représentera la quantité de chaleur contenue dans le gaz à zéro et à H, si l'on suppose, comme on peut toujours le faire, que $\Psi(H) = 0$.

En réduisant cette formule en nombres, nous trouvons

$$Q = 0{,}308.t + 0{,}0341.\Psi(p) + A.$$

D'après cette formule, pour passer de l'état primitif (zéro, H) à un autre état quelconque (t, p), il faudrait dépenser

$$(37) \qquad Q - A = 0{,}308.t + 0{,}0341.\Psi(p).$$

Cette quantité de chaleur entrerait tout entière dans la masse gazeuse, et, par suite, la série des états intermédiaires n'influerait pas sur elle. Donc, après le parcours d'un circuit fermé, la dépense serait nulle; le travail obtenu par l'intermédiaire de l'air n'aurait rien coûté, et l'on aurait réalisé le mouvement perpétuel. Cette conséquence répugne à notre mécanique, et cette contradiction confirme l'exactitude des recherches expérimentales qui semblent prouver que γ et, par suite, c' sont sensiblement constants pendant les changements d'états de la masse gazeuse.

Remarque III. — La formule $pv^\gamma = \text{const.}$, qui donne la courbe de libre détente, permet de compléter le raisonnement de Laboulaye et d'en déduire rationnellement la valeur de l'équivalent que nous avons déjà trouvée.

Faisons, à partir de 1 degré, détendre le gaz jusqu'à l'infini Nous avions, au début,

$$pv^\gamma = \text{const.} = \text{H}(1+\alpha)^\gamma;$$

donc, le travail de la détente s'obtiendra par la formule

$$\int_{1+\alpha}^{\infty} p\,dv = \text{H}(1+\alpha)^\gamma \int_{1+\alpha}^{\infty} v^{-\gamma}dv,$$

ou bien

$$\frac{\text{H}(1+\alpha)}{\gamma-1}.$$

A ce travail ajoutons celui de la pleine pression, et nous aurons pour le travail total

$$\text{H}\alpha + \frac{\text{H}(1+\alpha)}{\gamma-1} = \frac{\text{H}}{\gamma-1} + \frac{\text{H}\alpha\gamma}{\gamma-1}.$$

Mais, dès le début et sans chauffer, nous aurions pu laisser le gaz se détendre jusqu'à l'infini; le travail effectué aurait été

$$\int_{1}^{\infty} p\,dv = \text{H}\int_{1}^{\infty} v^{-\gamma}dv = \frac{\text{H}\alpha}{\gamma-1}.$$

L'excès de travail, dans le premier cas, est

$$\frac{\text{H}\alpha\gamma}{\gamma-1} = \frac{\text{H}\alpha}{1-\frac{1}{\gamma}}.$$

C'est là évidemment le travail dû uniquement à la chaleur dépensée $\text{D}_0 c$; donc, nous trouverons l'équivalent d'une calorie par la formule

$$\text{E} = \frac{\text{H}\alpha}{\text{D}_0 c\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}.$$

C'est précisément celle que nous avons déjà trouvée.

Remarque IV. — Le raisonnement donné dans la plupart des Traités de physique, pour trouver le rapport des deux chaleurs spécifiques, ne me paraît pas parfaitement exact; voici celui qu'il faut lui substituer, en s'appuyant sur la formule

$$\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'} = \left(\frac{v'}{v}\right)^{\gamma-1}.$$

Considérons 1 mètre cube de gaz à zéro, et sous la pression H. Élevons la température à 1 degré, il deviendra

$$1+\alpha.$$

Comprimons-le alors de manière à lui donner la température $1+\omega$, et à le ramener au volume primitif; nous aurons

$$\frac{1+\alpha(1+\omega)}{1+\alpha} = (1+\alpha)^{\gamma};$$

donc

$$1+\alpha(1+\omega) = (1+\alpha)^{\gamma} = 1+\gamma\alpha \quad \text{(à peu près)};$$

par suite

(38) $$\gamma = 1+\omega \quad \text{(à peu près)};$$

d'où l'on voit qu'il suffit de trouver ω pour en conclure γ.

Au lieu de partir de zéro, nous pouvons partir d'une température quelconque t et dire : Considérons 1 mètre cube de gaz à t^{o}; chauffons-le de manière qu'il prenne la température $t+\theta$: le volume deviendra

$$\frac{1+\alpha(t+\theta}{1+\alpha t}.$$

Comprimons-le maintenant de manière à le ramener au volume primitif : la température augmentera et deviendra $t+\theta+\omega$; donc. nous aurons

$$\frac{1+\alpha(t+\theta+\omega)}{1+\alpha(t+\theta)} = \left[\frac{1+\alpha(t+\theta)}{1+\alpha t}\right]^{\gamma-1},$$

ou bien

$$\frac{1+\alpha(t+\theta+\omega)}{1+\alpha t} = \left[\frac{1+\alpha(t+\theta)}{1+\alpha t}\right]^{\gamma}.$$

Donc, en négligeant les puissances de α supérieures à la première,

$$1 + \alpha(\theta + \omega) = 1 + \gamma\alpha\theta;$$

d'où enfin

$$\gamma = 1 + \frac{\pi}{\theta}. \tag{39}$$

Cette formule approximative a été employée par Clément et Désormes dans leurs recherches sur le nombre γ. On pourrait, au moyen des logarithmes, se servir des formules rigoureuses sans beaucoup de peine.

§ XI. — *Dépense de chaleur nécessaire pour dilater le gaz sans changer sa température.*

Dans la formule (23)

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha}\int_{v_0}^{V}(c'v\,dp + cp\,dv),$$

posons

$$pv = H(1 + \alpha t).$$

en regardant t comme un paramètre constant. Nous aurons

$$p\,dv + v\,dp = 0,$$

et, par suite,

$$Q = \frac{D_0(c - c')}{H\alpha}\int_{v_0}^{V} p\,dv,$$

et, en intégrant,

$$Q = \frac{D_0(c - c')}{\alpha}(1 + \alpha t)\,l\frac{V}{v_0}, \tag{40}$$

l désignant un logarithme népérien, ou bien

$$Q = \frac{D_0(c - c')}{H\alpha}p_0 v_0\,l\frac{V}{v_0}. \tag{41}$$

Ces relations conduisent aux lois suivantes :

Première loi. — *Les quantités de chaleur absorbées ou dégagées pendant la dilatation ou la compression d'un gaz, faites sans chan-*

gement de température, varient en progression arithmétique lorsque les volumes varient en progression géométrique.

Deuxième loi. — *Des volumes égaux de tous les gaz, pris à la même température, étant comprimés ou dilatés d'une même fraction de leur volume, dégagent ou absorbent la même quantité de chaleur.*

Troisième loi. — *Des volumes égaux de tous les gaz, pris à la même température, étant comprimés ou dilatés d'une même fraction de leur volume, dégagent ou absorbent des quantités de chaleur proportionnelles à la pression.*

Dulong a vérifié par des expériences directes l'exactitude de la seconde loi.

Ces lois résultent de l'invariabilité de c, c', γ; par suite, elles fournissent aux expérimentateurs divers moyens pour contrôler nos hypothèses, déterminer la valeur de γ et aussi la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur.

§ XII. — *Chaleur spécifique composée.*

Dans la recherche des chaleurs spécifiques, on suppose que la pression reste la même ou que le volume reste le même. Admettons que la pression et le volume varient tous deux infiniment peu, dans le rapport

$$\frac{dp}{dv} = m;$$

cherchons la quantité de chaleur nécessaire pour faire varier la température de dt. En divisant ensuite dQ par $D_0\,dt$, nous aurons la quantité de chaleur nécessaire pour faire varier d'un degré la température d'un kilogramme de gaz, en admettant que p varie avec v dans le rapport

$$\frac{\Delta p}{\Delta v} = m.$$

Cette espèce de chaleur spécifique pourra être appelée *chaleur spécifique composée suivant la pente m.*

Si dans la formule générale

$$dQ = \frac{D_0}{H\alpha}(c'v\,dp + cp\,dv)$$

nous posons

$$dp = m\,dv,$$

puis

$$p\,dv + v\,dp = p\,dv + mv\,dv = H\alpha\,dt,$$

nous obtenons

$$dQ = D_0 \frac{cp + c'mv}{p + mv}\,dt;$$

donc

$$(42) \qquad \frac{dQ}{D_0\,dt} = c_m = \frac{c\left(\frac{p}{v}\right) + c'm}{\left(\frac{p}{v}\right) + m}.$$

Telle est l'expression de la chaleur spécifique composée c_m. Cette formule donne bien c si $m = 0$ et c' si $m = \infty$.

Dans le cas général, la dépense c_m dépend non-seulement de m, mais encore du rapport primitivement établi entre la pression et le volume. Si l'on admet que $m = \frac{p}{v}$, ou, en d'autres termes, si l'on fait varier à la fois la pression et le volume de manière à conserver pendant l'échauffement le rapport primitivement établi entre ces deux quantités, on aura

$$c_m = \frac{c + c'}{2},$$

quantité indépendante de m et égale environ à

$$0,850.$$

Cette conséquence mériterait une confirmation expérimentale.

On voit qu'en faisant varier une seule des quantités p, v dans l'échauffement des gaz les physiciens sont arrivés à des lois simples qui leur auraient échappé s'ils avaient étudié les chaleurs spécifiques dans toute leur généralité.

Remarque. — Il faut bien entendre ce que nous nommons *rapport* entre les deux quantités hétérogènes p et v. La pression p est exprimée en kilogrammes, le volume v en mètres cubes; mais nous convenons de représenter les deux unités par la même ligne, et c'est toujours à cette représentation que nous nous reportons, quand nous parlons des rapports $\frac{p}{v}$, $\frac{dp}{dv}$.

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORIE DES MACHINES ATMOSPHÉRIQUES.

§ I. — *Jeu théorique de la machine.*

Nous admettons que la machine fonctionne théoriquement de la manière suivante :

1° Un certain volume d'air est introduit, à la pression ordinaire et à la température extérieure, dans un foyer de chaleur; il s'y échauffe et se dilate librement en gardant la pression primitive; il pousse ainsi un piston équilibré, sans qu'il y ait un travail utilisable.

2° On suppose qu'à la fin de sa course il se détende par l'augmentation de la capacité du cylindre où il est enfermé; et, comme la pression extérieure est sans cesse plus grande que la pression intérieure, il faut dépenser un certain travail pour produire cette détente.

3° Nous supposerons alors que par un moyen quelconque on refroidisse l'air chaud sans changer son volume : sa force élastique diminue encore.

4° L'atmosphère, pressant ensuite sur la tête du piston, produit un travail moteur jusqu'à ce que la force élastique de l'air intérieur redevienne égale à la pression atmosphérique; à ce moment, nous abandonnons l'air que nous avons employé pour recommencer sur une égale quantité la même série d'opérations.

Il s'agit de savoir quel est le travail utilisable dans un premier cycle d'opérations.

§ II. — *Notations diverses.*

Appelons :

A la section du cylindre théorique de la machine,
l la longueur occupée par l'air à t°,
t la température extérieure,
H la pression extérieure,
T la température communiquée à l'air par le foyer,
mH la pression de l'air après la détente,
Θ la température après la détente,
θ la température donnée à l'air par le réfrigérant agissant à volume constant,
pH la pression de l'air après l'action du réfrigérant,
L_1 la longueur occupée par l'air après la détente,
$\mathcal{E}_1$ le travail résistant développé par l'atmosphère pendant la détente,
$\mathcal{E}_2$ le travail moteur développé par l'atmosphère après le refroidissement, en admettant que l'air s'échauffe pendant la compression,
L_2 la course du piston dans cette hypothèse,
Θ_1 la température de l'air après la course,
$\mathcal{E}'_2$ le travail moteur de l'atmosphère dans l'hypothèse d'un réfrigérant continu qui maintiendrait la température constante pendant la compression,
L'_2 la course du piston dans cette hypothèse,
U le travail utilisable dans la première hypothèse ou $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$,
U' le travail utilisable dans la seconde hypothèse ou $\mathcal{E}'_2 - \mathcal{E}_1$,
β le rapport $\frac{\gamma - 1}{\gamma} = 0,291$, d'où $\frac{1}{\beta} = 3,439$.

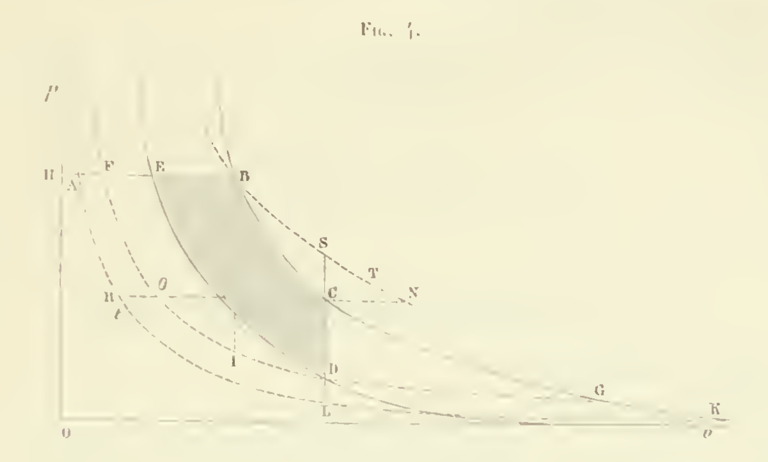
Nous prendrons :

Le mètre pour unité de longueur,
Le mètre carré pour unité de surface,
Le mètre cube pour unité de volume,
Le kilogramme pour unité de poids et de force,
Le kilogrammètre pour unité de travail.

Il est facile de se représenter le cycle parcouru par l'air, et cette représentation est très-utile pour apercevoir facilement les dispositions

les plus avantageuses à réaliser. Nous tracerons en lignes pleines les courbes de détente libre et en lignes pointillées les courbes isothermiques ou les courbes de détente sans changement de température.

Fig. 4.



Le cycle correspondant à notre machine est ABCDEA (*fig.* 4).

La masse gazeuse a pour pression primitive OH = H; elle se dilate sans changer de pression jusqu'à ce qu'elle atteigne l'état B. Elle se détend librement jusqu'en C; elle se refroidit ensuite à volume constant et passe à l'état D; elle se comprime sous l'influence de la poussée de l'atmosphère en suivant la courbe de détente libre jusqu'en E; elle revient ensuite à l'état ordinaire en s'échappant dans l'atmosphère et se retrouve en A.

Nous nous proposons de trouver tous les éléments nécessaires à la connaissance complète du parcours de ce circuit par une masse d'air donnée en fonction des quantités connues.

§ III. — *Longueur L occupée par l'air après son échauffement.*

Nous avons désigné par l la longueur primitive, par L la longueur finale cherchée; la formule des dilatations donne

$$L = l\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}. \tag{43}$$

§ IV. — *Longueur L′ occupée par l'air après la détente.*

La formule (33) donne

$$\frac{mH}{H} = \left(\frac{L}{L'}\right)^{\gamma};$$

d'où

$$(44)\qquad L' = L\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = l\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

§ V. — *Température Θ de l'air après la détente.*

La formule (35) donne

$$(45)\qquad \frac{1+\alpha\Theta}{1+\alpha T} = m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = m^{\beta}.$$

Cette équation fera connaître Θ.

§ VI. — *Travail $\mathfrak{T}_1$ résistant pendant la détente.*

Nous avons appelé L la longueur occupée par l'air avant la détente, soit L_1 la longueur occupée par l'air à la fin et $L + x$ la longueur à une époque quelconque, le travail élémentaire de la détente sera

$$A(H - H')dx,$$

H' étant la pression correspondante à la longueur $L + x$; donc le travail total sera

$$\mathfrak{T}_1 = AH(L_1 - L) - A\int_0^{L_1 - L} H'dx.$$

Exprimons H' en fonction de x, au moyen de la formule (33), nous aurons

$$\frac{H'}{H} = \left(\frac{L}{L+x}\right)^{\gamma} = L^{\gamma}(L+x)^{-\gamma}.$$

Substituons dans l'intégrale, effectuons, nous trouverons, après quelques réductions faciles,

$$\tau_1 = \text{AHL}' - \text{AHL} + \frac{\text{AHL}}{\gamma - 1}\left(\frac{\text{L}}{\text{L}'}\right)^{\gamma-1} - \frac{\text{AHL}}{\gamma - 1}.$$

Remplaçons L' par sa valeur donnée ci-dessus (§ IV), nous aurons

$$(46) \qquad \tau_1 = \text{AHL}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{m^\beta}{\gamma - 1} - \frac{1}{\beta}\right],$$

et, si nous remplaçons L par sa valeur trouvée (§ III), il viendra enfin

$$(47) \qquad \tau_1 = \text{AH}\, l\, \frac{1 + \alpha \text{T}}{1 + \alpha t}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{m^\beta}{\gamma - 1} - \frac{1}{\beta}\right],$$

qui ne contient que les données. Comme vérification, on peut voir que ce travail se réduit à zéro quand $m = 1$, c'est-à-dire quand il n'y a pas de détente.

§ VII. — *Pression* pH *de l'air après son refroidissement.*

A la fin de la détente, le volume de l'air est V, la pression est mH, la température Θ; donc

$$m\text{HV} = \text{H}(1 + \alpha\Theta) = m^\beta \text{H}(1 + \alpha\text{T}).$$

Après le refroidissement, la pression est pH, le volume n'a pas changé, et la température est devenue θ; donc

$$p\text{HV} = \text{H}(1 + \alpha\theta);$$

par suite

$$\frac{p}{m} = \left(\frac{1}{m}\right)^\beta \frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha\text{T}},$$

ou bien

$$(48) \qquad p = m^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha\text{T}}.$$

Cette formule ne contient que les données.

§ VIII. — *Travail moteur $\mathfrak{T}_2$ développé par l'atmosphère, en supposant que l'air s'échauffe pendant la compression.*

Au moment où le travail de la compression commence, la longueur occupée par l'air est L'. Admettons qu'il soit à une distance y de cette position extrême; le travail élémentaire de cette compression sera

$$A(H - H')\,dy,$$

en nommant H' la force élastique de l'air du cylindre; donc le travail total sera, en nommant y_1 la course du piston au moment où la pression est redevenue H,

$$\mathfrak{T}_2 = AHy_1 - AH\int_0^{y_1}\frac{H'}{H}\,dy.$$

Mais nous avons

$$\frac{H'}{pH} = \left(\frac{L'}{L' - y_1}\right)^{\gamma}:$$

par suite, en faisant $H' = H$,

$$(49)\qquad \frac{1}{p} = \left(\frac{L'}{L' - y}\right)^{\gamma};$$

donc, en effectuant l'intégration et en éliminant y_1, il viendra

$$\mathfrak{T}_2 = AHL'\left[1 + \frac{p}{\gamma - 1} - \frac{1}{\beta}\,p^{\frac{1}{\gamma}}\right],$$

et. en remplaçant L' et p par leurs valeurs déjà trouvées, nous aurons en fonction des données seules :

$$(50)\qquad \mathfrak{T}_2 = AH\,l\,\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha T} - \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma^2}}\left(\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]$$

§ IX. — *Course y_1 du piston pendant ce travail.*

Cette course est donnée par la formule (49) ci-dessus, qui, résolue par rapport à y_1, conduit à l'équation

$$L_2 = y_1 = L'\left(1 - p^{\frac{1}{\gamma}}\right),$$

ou bien encore, en remplaçant L' et p par leurs valeurs en fonction des données,

$$(51) \qquad L_2 = l\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

§ X. — *Température Θ_1 après la course.*

La température primitive était celle du réfrigérant θ; la compression se fait librement; donc la température finale sera donnée par la formule (35), et nous aurons

$$\frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha\theta} = \left(\frac{H}{pH}\right)^{\beta} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\beta},$$

ou bien encore

$$(52) \qquad \frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha\theta} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\beta},$$

ou bien encore

$$(53) \qquad \frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha T} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right).$$

Ces formules ne renferment plus que les données.

§ XI. — *Travail $\mathfrak{T}'_2$ développé par l'atmosphère, en supposant que l'air intérieur garde toujours la même température.*

Imaginons que, par un dispositif spécial, on puisse maintenir la température constante pendant la compression; l'air arrivé en D suivra la

courbe isothermique DF, au lieu de suivre la courbe de détente libre DE. Les raisonnements faits dans le § IX peuvent se répéter au début, et l'on aura

$$\mathfrak{E}'_2 = \mathrm{AH}\, y'_1 - \mathrm{AH}\int_0^{y'_1} \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}\, dy;$$

mais $\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}$ s'évalue au moyen de la loi de Mariotte, et l'on a

$$\frac{\mathrm{H}'}{p\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}' - y},$$

et aussi

$$\frac{1}{p} = \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}' - y'_1}.$$

De là on déduit, à la suite de la quadrature et de quelques réductions faciles,

$$\mathfrak{E}'_2 = \mathrm{AHL}'\left(1 - p - p\,\mathfrak{L}\,\frac{1}{p}\right),$$

$\mathfrak{L}$ désignant un logarithme népérien. Si nous introduisons les données, nous obtenons enfin

$$(54)\quad \mathfrak{E}'_2 = \mathrm{AH}\,l\,\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\left\{\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}}\,\mathfrak{L}\,10.\log\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha\theta}\right]\right\}.$$

On sait d'ailleurs que

$$\mathfrak{L}\,10 = 2{,}3025851.$$

§ XII — *Course L'_2 du piston dans cette seconde hypothèse.*

Cette course est donnée par la formule ci-dessus, qui, résolue par rapport à y'_1, conduit à la relation

$$\mathrm{L}'_2 = y'_1 = \mathrm{L}'(1 - p),$$

ou bien à

$$(55)\quad \mathrm{L}'_2 = l\,\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}}\right],$$

qui ne contient que les données.

§ XIII. — *Travail* U *utilisable de la machine dans le cas où l'air s'échauffe pendant la compression.*

Ce travail, étant la différence entre $\mathfrak{C}_2$ et $\mathfrak{C}_1$, est facile à obtenir, et nous avons

$$(56)\qquad U = \mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_1 = \frac{AHl}{\beta}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1 + \frac{1}{\gamma}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{m^\beta}{\gamma}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right],$$

en fonction des données seulement.

§ XIV. — *Travail* U' *utilisable dans le cas d'un réfrigérant continu.*

Ce travail s'obtient par la différence $\mathfrak{C}'_2 - \mathfrak{C}_1$, et l'on a

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} U' = \mathfrak{C}'_2 - \mathfrak{C}_1 = AHl\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\Big\{\frac{1}{\beta} - \frac{m^\beta}{\gamma - 1}\\ + \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\,\xi\,10.\log\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Les deux formules qui donnent U et U' suffisent pour faire, dans tous les cas possibles, immédiatement le calcul de l'effet utile à attendre d'une machine à air atmosphérique réalisant, par sa construction, les conditions théoriques dans lesquelles nous nous sommes placés. De pareilles machines seraient inexplosibles, puisqu'elles opéreraient à une pression inférieure à celle de l'atmosphère.

§ XV. — *Influence de la détente m sur l'effet utile* U.

Nous pouvons maintenant faire une discussion intéressante et chercher quelles sont les conditions pour que la machine retire la plus grande quantité de travail possible d'un mètre cube d'air donné, avec une quantité déterminée de calorique dépensé.

Cette question se résout presque à vue au moyen du diagramme des états successifs que nous avons donné (*fig.* 4).

Admettons d'abord que l'on ne puisse suivre que les courbes de détente ou de compression libre qui sont marquées en traits pleins. La surface du contour EBCD représente le travail utilisable de la machine. Si l'on conserve le même réfrigérant et qu'on pousse la détente plus ou moins loin, on fait varier le point C sur la courbe BC, et le point D se meut sur la courbe isothermique FD. Si le point D est en I, la surface représentative du travail U est BIF; quand le point D est en G, la surface est nulle; il existe un point intermédiaire où cette surface est aussi grande que possible, et que le calcul seul peut déterminer exactement.

Nous avons

$$D_m U = \frac{AHl}{\gamma}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right].$$

Nous voyons, par conséquent, que cette dérivée devient nulle pour

$$(58)\qquad m = \left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma^2-1}}.$$

De plus, une valeur inférieure de m rend la dérivée positive; une valeur supérieure rend la dérivée négative. Cette valeur de m correspond bien au maximum de U. Remplaçons dans la formule qui donne U (XIII) m par cette valeur, nous aurons, pour l'effet utile maximum,

$$(59)\qquad U_M = \frac{AHl}{\beta}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\left[1+\frac{1}{\gamma}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}-\frac{\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}\right].$$

Il serait difficile de prévoir ce résultat par une construction graphique.

Nous trouvons facilement, pour ce cas, la températur Θ de l'air à la fin de la détente; elle est donnée par la formule

$$(60)\qquad \frac{1+\alpha\Theta}{1+\alpha T} = \left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}.$$

La longueur L′, occupée par l'arc après sa détente, est

$$(61)\qquad L' = l\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\frac{1}{\gamma^2-1}}.$$

La pression pH, après l'action du réfrigérant, est

$$(62)\qquad pH = H\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}}.$$

La course du piston, pendant le travail moteur de l'atmosphère, est

$$(63)\qquad L_2 = l\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\frac{1}{\gamma^2-1}}\left[1-\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma^2-1}}\right].$$

Enfin, la température de l'air sortant de la machine est

$$(64)\qquad \frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha T} = \left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}.$$

Tels sont les éléments de la construction d'une machine atmosphérique opérant dans les meilleures conditions possibles de détente, avec un foyer et un réfrigérant déterminés.

§ XVI. — *Influence du réfrigérant sur l'effet utile* U.

Si nous jetons les yeux sur notre diagramme, nous apercevons immédiatement que U augmente si le point D s'abaisse; donc nous aurons le maximum de U, toutes choses égales d'ailleurs, si le point D s'abaisse jusqu'au point L, ou, ce qui est la même chose, si le réfrigérant ramène l'air à la température extérieure, au-dessous de laquelle nous supposerons qu'on ne puisse pas descendre.

Le calcul conduirait aux mêmes conditions.

De là résulte que nous augmenterons U_M du paragraphe précédent en y supposant θ aussi petit que possible.

§ XVII. — *Influence de la détente sur* U′.

Changeons maintenant de diagramme, et supposons que l'air arrivé en D suive, dans sa compression, non pas la courbe de détente libre DE, mais la courbe DF isothermique; l'effet utile sera plus grand, et nous avons trouvé qu'il est donné par la formule U′ (§ XIV).

Notre figure nous montre immédiatement que la détente de l'air influe sur U′; car, si le point C se déplace sur la courbe BC, l'aire BCDF varie. Le maximum de U′ a lieu quand C arrive en G, c'est-à-dire quand l'air est détendu jusqu'à ce qu'il prenne la température que lui donnerait le réfrigérant. Le calcul conduirait à la même conclusion, et l'on trouverait, pour la valeur de la détente la plus favorable,

$$(65) \qquad m = \left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

et, pour le maximum de l'effet utile,

$$(66) \quad U'_M = \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1 - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \beta\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\mathcal{L}10.\log\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right];$$

la valeur de m rend ensuite Θ égal à θ, comme le diagramme l'indique. On n'aurait aucune difficulté à trouver tous les autres éléments nécessaires à la connaissance complète de la machine.

Comme dans le cas précédent, il est évident, par notre figure même et sans calcul, que U′ augmente quand θ diminue, toutes choses égales d'ailleurs; U'_M augmenterait donc et serait aussi grand que possible si l'on y faisait $\theta = t$. Le circuit des états de l'air serait, dans ce cas, ABCKLA.

§ XVIII. — *Effet utile maximum entre deux températures données.*

Si par le point K de la courbe isothermique (t) nous menons une parallèle à l'axe OV et que nous la prolongions jusqu'au point de

rencontre M de la courbe isothermique (T), nous aurons le circuit ABMKA plus grand que tous les circuits précédents.

Pour le suivre, il faudrait que l'air se détendît en gardant la température constante T; qu'il se refroidît ensuite sous pression constante, de manière à reprendre la température extérieure t, et enfin qu'il fût comprimé à température constante par la pression atmosphérique agissant sur la tête du piston, jusqu'à ce qu'il eût repris la pression extérieure H. De B en M, le travail de l'atmosphère serait résistant; de M en K, l'atmosphère développerait à pleine pression un travail moteur, et de K en A l'atmosphère fournirait, à pression variable, un nouveau travail.

La surface du contour, qui exprimerait le travail utile extérieur retiré du volume $\mathrm{A}l$ d'air, est facile à évaluer, et l'on trouve

$$(67)\qquad U'' = \mathrm{AH}l\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t} - 1\right)\mathcal{L}\frac{1}{m},$$

en nommant $m\mathrm{H}$ la pression de l'air après sa plus grande détente.

Cette valeur ne dépend que de m, et l'on voit que si m tend vers 0, c'est-à-dire si l'on prolonge la détente de plus en plus loin, U'' croît indéfiniment.

Au point de vue des applications, ce résultat est important. Il démontre que, *théoriquement,* il est possible d'obtenir d'une machine opérant entre deux températures données, t et T, une quantité de travail aussi grande que l'on voudra; il suffit que l'on puisse produire de très-longues détentes, et que l'on ait la possibilité de conserver, pendant la détente et la compression, une température constante à l'air que l'on emploie. Les conséquences que nous venons de signaler ne supposent pas que T soit très-grand; par conséquent, les constructeurs n'auront pas à vaincre les difficultés inhérentes à l'emploi des hautes températures. D'ailleurs, ces machines étant inexplosibles, il n'y aurait pas à s'inquiéter des résistances des organes; il suffirait qu'ils supportassent sans écrasement la pression extérieure.

§ XIX. — *Rendement des machines atmosphériques*

Jusqu'à présent, nous n'avons pas comparé, pour les machines que nous avons imaginées, la dépense de calorique et le calorique utilisé; c'est ce que nous allons faire maintenant, et nous trouverons dans nos calculs nouveaux une vérification de ceux que nous venons de faire.

Nous appellerons :

Q le calorique dépensé pour faire passer la masse gazeuse que parcourt la machine de la température t à la température T;

Q_1 la chaleur déposée dans le réfrigérant à volume constant;

Q_2 la chaleur que l'air possède encore après avoir travaillé.

Si nous prenons la première machine imaginée, celle qui correspond au cycle ABCDEA, et qui semble la plus facile à réaliser, nous voyons que le nombre des calories anéanties ou, mieux, transformées en travail est donné par

$$Q - Q_1 - Q_2.$$

Or

$$Q = AlDc(T - t).$$

Le réfrigérant agissant à volume constant, on a

$$Q_1 = AlD\frac{c}{\gamma}(\Theta - \theta);$$

puis

$$Q_2 = AlDc(\Theta_1 - t);$$

donc la chaleur Q_3 transformée en travail est

$$Q_3 = AlDc\left[T - \frac{1}{\gamma}(\Theta - \theta) - \Theta_1\right],$$

ou bien

$$Q_3 = \frac{AlDc}{\alpha}\left\{(1 + \alpha T) - \frac{1}{\gamma}[(1 + \alpha\Theta) - (1 + \alpha\theta)] - (1 + \alpha\Theta_1)\right\}.$$

On peut encore l'écrire sous une autre forme, en mettant $(1 + \alpha T)$ en

facteur commun, et en remplaçant Θ et Θ_1 par leurs valeurs. On obtient alors

$$Q_3 = \frac{A l D c}{\alpha}(1 + \alpha T)\left[1 + \frac{1}{\gamma}\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha T} - \frac{m^\beta}{\gamma} - \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right],$$

ou bien

$$Q_3 = \frac{A l D_0 c}{\alpha}\,\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}\left[1 + \frac{1}{\gamma}\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha T} - \frac{m^\beta}{\gamma} - \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Si nous multiplions Q_3 par l'équivalent mécanique de la chaleur, ou

$$E = \frac{H\alpha}{D_0 c\beta},$$

nous devons obtenir U; c'est ce qu'il est facile de vérifier.

Remarque. — Le calcul que nous venons de faire montre nettement que le calorique est le véritable moteur des machines à feu. Si l'on fait le compte du calorique entré, de celui qui se perd inutilement par les réfrigérants employés, et de celui que l'air emporte après avoir travaillé, on obtient le travail utile de la machine en multipliant par 425 kilogrammètres le calorique disparu.

Le calorique Q_1 déposé dans le réfrigérant peut être en partie utilisé pour réchauffer l'air qui vient de l'extérieur au foyer, comme cela a été fait dans la machine d'Erickson. Les machines où se trouve réalisée cette économie de combustible sont dites *à récurrence*. La récurrence ne peut jamais être parfaite dans la pratique; car à mesure que l'air rentrant s'échauffe, il se rapproche de plus en plus de la température du réfrigérant. Désignons par k la fraction de la chaleur reprise; nous aurons, pour la chaleur dépensée,

$$Q - kQ_1;$$

donc le rendement de la machine sera

$$R = \frac{Q_3}{Q - kQ_1} = \frac{Q - Q_1 - Q_2}{Q - kQ}.$$

Cette quantité est toujours inférieure à l'unité, puisqu'elle l'est quand on suppose $k = 1$.

Si nous remplaçons Q, Q_1, Q_2 par leurs valeurs et que nous posions

$$\varepsilon = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T};$$

en admettant que nous prenions la détente la plus favorable et $\theta = t$, nous avons

$$(68) \qquad R = \frac{1 - \varepsilon^{\frac{1}{\gamma+1}} - \frac{1}{\gamma}\left(\varepsilon^{\frac{\gamma}{\gamma^2-1}} - \varepsilon\right)}{1 - \varepsilon - \frac{k}{\gamma}\left(\varepsilon^{\frac{\gamma}{\gamma^2-1}} - \varepsilon\right)}.$$

Cette formule nous montre que plus la température T est grande, plus le rendement de la machine augmente, toutes choses égales d'ailleurs. Il a pour limite l'unité quand T croît indéfiniment. Ce résultat justifie les tentatives de M. Burdin, qui cherchait des combinaisons mécaniques, permettant d'employer l'air à la température de 800 degrés. Mais c'est aussi la nécessité de l'emploi des hautes températures qui arrêtera les constructeurs. Le mécanisme habituel des machines à vapeur ne peut évidemment plus servir. Il faut imaginer d'autres organes.

Nous pourrions aussi calculer le rendement des machines à réfrigérant continu; nous montrerons comment s'effectue cette évaluation dans la théorie des machines à compression, qui présentent comme cas particulier les machines atmosphériques.

CONCLUSIONS.

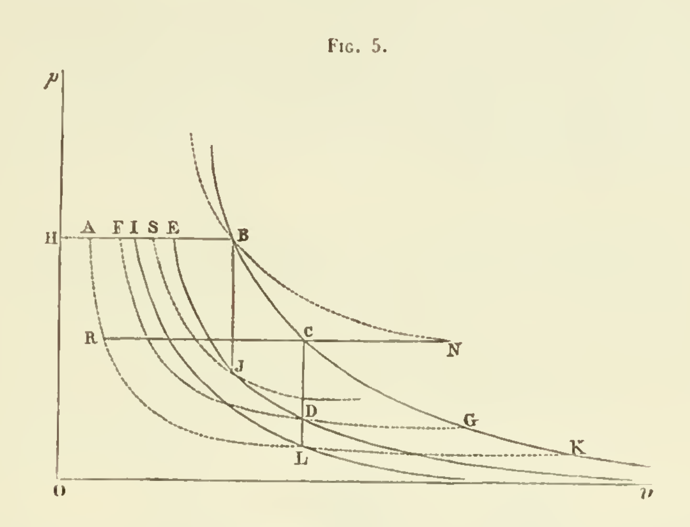
Des calculs que nous venons de faire sur les machines atmosphériques, nous pouvons tirer les conclusions suivantes, qui intéresseront plus particulièrement les praticiens :

1° L'emploi des machines atmosphériques aurait l'avantage d'être exempt de tout danger d'explosion, puisqu'elles agissent à une pression inférieure à celle de l'atmosphère.

2° Le mètre cube d'air chauffé à T° donnerait le maximum d'effet utile si on le détendait à température constante; si ensuite on laissait

agir à pleine pression l'atmosphère pendant qu'il se refroidirait jusqu'à reprendre la température extérieure, et si enfin l'atmosphère le comprimait à température constante jusqu'à ce qu'il eût repris la pression atmosphérique. Mais ce cycle idéal d'états représenté dans notre figure par ABNRA (*fig.* 5) paraît difficile à suivre dans la pratique; on ne peut que chercher à s'en rapprocher.

Fig. 5.



3° Admettons que la détente ne puisse pas se faire à température constante, mais que la compression puisse suivre la courbe isothermique, à l'aide d'un réfrigérant continu; on devra pousser la détente jusqu'à ce que le gaz ait repris la température extérieure, si l'on veut une machine *parfaite*. Le cycle à suivre est alors ABKA.

4° Il paraît encore bien difficile d'avoir un réfrigérant continu; il faudra donc consentir à détendre et à comprimer librement à température variable. Dans ce cas, une machine sera parfaite si la détente donne à l'air la pression $m\mathrm{H}$ déterminée par

$$m\mathrm{H} = \mathrm{H}\left(\frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha \mathrm{T}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}},$$

et si le réfrigérant instantané à volume constant ramène le gaz à la température extérieure. Le cycle des états successifs est alors ABCLI.

5° Dans la pratique, on ne pourra pas avoir un réfrigérant parfait, et l'on suivra le cycle ABCDEA. On pourra prendre néanmoins la détente correspondante au maximum d'effet utile

$$m\mathrm{H} = \mathrm{H}\left(\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha\mathrm{T}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}}.$$

6° Si l'on supprime toute détente, c'est-à-dire si l'on fait dans nos formules $m = 1$, on suivra le cycle ABJE; on aura une machine facile à exécuter, mais encombrante et d'un rendement faible.

7° On se fera une idée de la marche du rendement au moyen du tableau numérique suivant :

Rendement $\frac{Q_3}{Q}$ de diverses machines atmosphériques.

TEMPÉRATURE T	RÉFRIG. INSTANTANÉ $m = 1$	RÉFRIGÉRANT CONTINU $m = 1$	RÉFRIG. INSTANTANÉ, machine parfaite.	RÉFRIGÉRANT CONTINU, machine parfaite.
100	0,028	0,038	0,058	0,132
200	0,051	0,068	0,150	0,235
300	0,067	0,090	0,148	0,313
400	0,083	0,108	0,181	0,372
500	0,095	0,124	0,209	0,420
600	0,105	0,138	0,236	0,460
700	0,117	0,143	0,257	0,494
800	0,121	0,153	0,276	0,524

La première colonne donne la température T à laquelle on supposera l'air chauffé.

Dans la seconde se trouve le rendement des machines suivant le cycle ABJEA.

Dans la troisième, le rendement des machines peu pratiques suivant le cycle ABJSA.

Dans la quatrième, le rendement des machines facilement réalisables, suivant le cycle ABCLIA, limite du cycle ABCDE.

Dans la cinquième, le rendement des machines difficilement réalisables suivant le cycle ABCLA, limite du cycle ABCDFA.

Nous appelons *rendement* le rapport $\frac{Q_3}{Q}$ entre la chaleur transformée et la chaleur dépensée. Nous négligeons complétement la chaleur reprise au réfrigérant, la récurrence qui diminue la depense réelle et peut compenser, au moins en partie, les pertes inévitables dues aux vices de construction de la machine et aux frottements divers.

Ce tableau nous montre que si l'on opère, comme le voulait M. Burdin, à de hautes températures, à 800 degrés environ, ce qui paraît nécessaire à une bonne combustion, le rendement des machines réalisables est environ 0,26. Admettons que l'air moteur soit l'air même du foyer : nous voyons qu'un kilogramme de houille fournira à cet air

$$6000 \times 0,26 = 1500^{\text{cal}} \text{ environ}$$

Ces calories équivalent à

$$1500 \times 424 = 636\,000^{\text{kgm}}.$$

Or les meilleures machines à vapeur usent au moins 1 kilogramme de charbon par heure et par cheval. Donc dans ces excellentes machines, 1 kilogramme de houille produit

$$75 \times 60 \times 60 = 270\,000^{\text{kgm}}.$$

On voit que la machine à air chaud projetée par M. Burdin serait plus de deux fois plus avantageuse, au point de vue économique, que la meilleure machine à vapeur.

TROISIEME PARTIE.

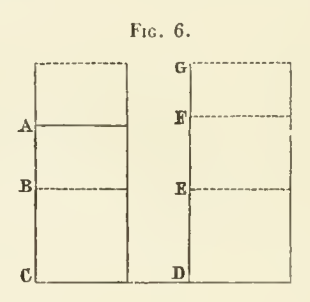
MACHINES A AIR CHAUD COMPRIMÉ.

Dans ces machines, le cycle des états de l'air est plus complexe que dans les machines atmosphériques; nous le prendrons de telle sorte qu'il comprenne la plupart des cycles employés par les constructeurs et même celui que nous venons d'étudier avec détail.

§ I. — *Jeu théorique de la machine.*

Imaginons deux cylindres égaux placés l'un à côté de l'autre, comme dans la figure ci-dessous (*fig.* 6), et pouvant communiquer au moyen d'un canal dont nous négligerons la capacité. Dans chacun d'eux se meut un piston.

Fig. 6.



1° Au moment où le piston est en A, le premier cylindre est rempli d'air ordinaire; le piston s'abaisse et l'air est comprimé; il faut une certaine dépense de travail pour produire cette compression.

2° On établit alors la communication entre les deux cylindres, et l'on continue à faire mouvoir le piston B jusqu'en C, en même temps le piston du second cylindre s'élève d'une hauteur égale jusqu'en E. L'air garde la même pression. Il est clair qu'il faut dépenser un certain travail pour ce refoulement, mais il est immédiatement restitué par le piston E, et nous n'en parlerons pas.

3° On chauffe alors l'air renfermé dans la capacité ED sans changer sa pression, jusqu'à T°. Il se produit un certain travail et le piston arrive en F.

4° On laisse alors l'air se détendre jusqu'à ce qu'il ait acquis une nouvelle pression, cette détente développe un nouveau travail et conduit le piston en G.

5° On refroidit alors l'air en lui conservant son volume. Sa température et sa pression diminuent donc encore. Après cela, l'atmosphère presse sur le piston et développe un nouveau travail. La pression augmente et finit par devenir égale à celle de l'atmosphère. On abandonne alors l'air primitif en lui faisant traverser une sorte d'éponge métallique qui donnerait à l'air rentrant un peu de calorique en récurrence.

Il s'agit de trouver des formules qui fassent connaître tous les éléments qui se rapportent au jeu de cette machine.

§ II. — *Notations.*

Nommons :

l la longueur primitive AC du cylindre à refoulement,
λ la longueur BC = DE de l'air après sa compression,
L la longueur DF après l'échauffement,
L_1 la longueur DG après la détente,
A la section du cylindre,
t la température de l'air ordinaire,
H sa force élastique,
τ la température due à la compression,
nH la force élastique due à la compression,
$\mathfrak{T}_1$ le travail nécessaire pour la produire,
T la température due à l'échauffement sous pression constante nH,
$\mathfrak{T}_2$ le travail de l'air à pleine pression pendant cet échauffement,
$\mathfrak{T}_3$ le travail dû à la détente,
mH la force élastique de l'air après la détente,
Θ sa température,
θ sa température après l'action du réfrigérant instantané à volume constant,

$p\mathrm{H}$ sa force élastique après le refroidissement,
ϖ_4 le travail de l'atmosphère en supposant que l'air s'échauffe par la compression,
L_2 la course du piston dans cette hypothèse,
Θ_1 la température de l'air à la fin de sa course,
ϖ'_4 le travail de l'atmosphère dans le cas d'un réfrigérant continu maintenant toujours l'air à θ,
L'_2 la course du piston dans cette hypothèse,
U l'effet utile final dans le cas d'un réfrigérant instantané,
U' l'effet utile dans le cas d'un réfrigérant continu,
Q la quantité de chaleur donnée à l'air quand on l'échauffe,
Q_1 la quantité de chaleur laissée dans le réfrigérant instantané,
Q'_1 la quantité de chaleur prise par le réfrigérant continu,
Q_2 la quantité de chaleur emportée par l'air sortant de la machine dans le cas d'un réfrigérant instantané,
Q'_2 la quantité de chaleur emportée par l'air sortant de la machine dans le cas d'un réfrigérant continu.

PREMIÈRE PÉRIODE. — COMPRESSION DE L'AIR.

§ III. — *Travail dépensé pour la compression.*

Considérons le piston à une époque quelconque de sa course, et soit x l'espace qu'il a déjà parcouru à partir de sa position initiale A. Si H' est la force élastique de l'air intérieur à ce moment, le travail élémentaire pour lui faire parcourir dx sera

$$\mathrm{A}(\mathrm{H}' - \mathrm{H})dx;$$

donc le traveil nécessaire pour la compression de l'air sera

$$\varpi_1 = \mathrm{A}\int_0^{l-\lambda}(\mathrm{H}' - \mathrm{H})dx = \mathrm{A}\int_0^{l-\lambda}\mathrm{H}'dx - \mathrm{AH}(l-\lambda).$$

Pour exprimer H' en fonction de x, il faut recourir à la formule

de Laplace, démontrée dans la première Partie de notre Mémoire :

$$\frac{H'}{H} = \left(\frac{l}{l-x}\right)^{\gamma}.$$

Si nous substituons cette valeur de H' dans la formule de T_1, nous pouvons intégrer, et, après quelques réductions faciles, nous trouvons

$$\varpi_1 = \frac{AHl}{\beta}\left[\frac{n^{\beta}}{\gamma} + \beta\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right]$$

ou

(69) $$\varpi_1 = \frac{AHl}{\beta}\left(\frac{n}{\gamma} + \beta - n^{\frac{1}{\gamma}}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

§ IV. — *Course du piston.*

La course du piston $l - \lambda$ se déduit facilement de la formule de Laplace. Il suffit d'y faire $H' = nH$; on en déduit

$$n = \left(\frac{l}{\lambda}\right)^{\gamma},$$

d'où

$$\lambda = l\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}};$$

par suite

(70) $$l - \lambda = l\left[1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Cette dernière formule fait connaître l'espace occupé par l'air après sa compression.

§ V. — *Température τ après la compression*

Cette température τ est déterminée par la formule

(71) $$\frac{1+\alpha\tau}{1+\alpha t} = n^{\beta} = n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

de la première Partie de notre Mémoire.

§ VI. — *Chaleur engendrée par la compression.*

On peut calculer cette chaleur en s'appuyant sur le principe général de la transformation du travail en chaleur, démontré dans la première Partie; mais on peut aussi le calculer directement, comme il suit, au moyen des formules de Laplace et montrer que ces formules contiennent implicitement le principe de la transformation. C'est d'ailleurs sous cette première forme que nous avons donné la démonstration de cette loi remarquable dans le Mémoire présenté à l'Académie le 9 novembre 1857.

Imaginons qu'on refroidisse l'air au point de lui redonner la force élastique H, sans changer son volume. Désignons par τ' la température et par V son volume, nous aurons

$$n\mathrm{HV} = k(1 + \alpha\tau), \quad \mathrm{HV} = k(1 + \alpha\tau');$$

donc

$$\frac{1 + \alpha\tau'}{1 + \alpha t} = \frac{1}{n}.$$

D'ailleurs

$$\frac{1 + \alpha\tau}{1 + \alpha t} = n^{1-\frac{1}{\gamma}}:$$

donc

$$\frac{1 + \alpha\tau'}{1 + \alpha t} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

La quantité de chaleur enlevée dans ce refroidissement sera

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathrm{A}\,l\,\mathrm{D}_0\,c}{\gamma(1 + \alpha t)}(\tau - \tau'),$$

ou bien

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathrm{A}\,l\,\mathrm{D}_0\,c}{\gamma\alpha}\left[n^\beta - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Maintenant chauffons doucement cet air en lui permettant une libre dilatation sous pression constante, le piston s'élèvera lentement sans

travailler et finira par reprendre son volume primitif. Il est facile de voir qu'il reprendra en même temps sa température primitive; car désignons par τ'' sa température quand il occupera la longueur l, nous aurons

$$l = \lambda \frac{1 + \alpha\tau''}{1 + \alpha\tau'},$$

donc

$$\frac{1 + \alpha\tau''}{1 + \alpha\tau'} = n^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Combinons cette équation avec celle qui donne τ', nous aurons

$$\frac{1 + \alpha\tau''}{1 + \alpha t} = 1;$$

par suite $\tau'' = t$. C. Q. F. D.

La chaleur absorbée par l'air dans cette dilatation sera donc

$$\mathfrak{Q}_1 = \frac{\mathrm{A}\, l\, \mathrm{D}_0 c}{1 + \alpha t}(t - \tau'),$$

ou bien

$$\mathfrak{Q}_1 = \frac{\mathrm{A}\, l\, \mathrm{D}_0 c}{\alpha}\left[1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

L'air est maintenant ramené à son état primitif. Il semble que la chaleur enlevée devrait être égale à la chaleur donnée; il n'en est cependant rien, car on a

$$\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}_1 = \frac{\mathrm{A}\, l\, \mathrm{D}_0 c}{\alpha}\left[\frac{n^{\beta}}{\gamma} + \beta\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right],$$

ou, en comparant à $\mathfrak{T}_1$,

$$\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}_1 = \frac{\mathrm{D}_0 c \beta}{\mathrm{H}\alpha}\mathfrak{T}_1.$$

Ainsi, tout se passe dans la nature comme si le travail se transformait en chaleur à raison de $\frac{\mathrm{H}\alpha}{\mathrm{D}_0 c\beta}$ kilogrammètres pour une calorie. C'est un résultat auquel nous devions nous attendre et qui prouve l'exactitude de nos calculs.

DEUXIÈME PÉRIODE. — DILATATION DE L'AIR PAR ÉCHAUFFEMENT.

§ VII. — *Travail de l'air à pleine pression pendant qu'il s'échauffe.*

L'air comprimé a passé dans le second cylindre, et on le chauffe à T° sans changer sa force élastique nH. Nous avons désigné par L la longueur occupée par l'air après cet échauffement, il occupait d'abord la longueur λ; donc le travail demandé est

$$\mathfrak{T}_2 = (n-1)\,\mathrm{AH}\,(\mathrm{L}-\lambda).$$

mais

$$\mathrm{L} = \frac{l}{n}\,\frac{1+\alpha \mathrm{T}}{1+\alpha t},$$

et

$$\lambda = l\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}};$$

donc nous aurons

$$(72)\qquad \mathfrak{T}_2 = \mathrm{AH}l\left(1-\frac{1}{n}\right)\left[\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t} - n^{\beta}\right],$$

qui ne contient plus que les données.

Si l'on faisait une machine sans détente, on aurait pour travail utilisable la différence

$$(73)\qquad \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1 = \frac{\mathrm{AH}l}{\beta}\left[\beta\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t} - n^{\beta} + 1\right],$$

dont nous nous servirons tout à l'heure.

§ VIII. — *Course du piston pendant ce travail.*

Cette course est L — λ; par suite, en nous servant des formules du paragraphe précédent, nous aurons

$$(74)\qquad \mathrm{L}-\lambda = l\left[\frac{1}{n}\,\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right],$$

qui peut se calculer directement au moyen des données.

§ IX. — *Chaleur perdue par le travail.*

Nous allons calculer directement cette chaleur sans nous servir du principe de la transformation; nous aurons ainsi une nouvelle confirmation de la justesse de nos calculs et en même temps l'indication d'un procédé d'où l'on aurait pu déduire le théorème de l'équivalent.

Enlevons d'abord à l'air chaud, sans changer son volume, une quantité de chaleur telle qu'il reprenne la pression atmosphérique. Il n'y aura pas de travail effectué. Puis, sans changer la pression, nous chaufferons doucement, jusqu'à ce que l'air ait repris la longueur l. La différence entre le nombre des calories données et celui des calories ôtées exprime le perte, puisque l'air est actuellement revenu à son état primitif.

Soit T_1 la température de l'air après qu'on lui a enlevé assez de chaleur pour le ramener à la pression H. Nous aurons, en nommant V son volume,

$$HV = k(1 + \alpha T_1);$$

mais

$$nHV = k(1 + \alpha T),$$

donc

$$\frac{1 + \alpha T_1}{1 + \alpha T} = \frac{1}{n}.$$

De là nous déduisons, pour la chaleur enlevée,

$$\chi = \frac{A l D_0 c}{\gamma \alpha}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}.$$

Désignons par T_2 la température qu'il faut maintenant donner à l'air pour le ramener à la longueur l, nous aurons

$$l = L\frac{1 + \alpha T_2}{1 + \alpha T_1},$$

ou bien

$$\frac{1 + \alpha T_2}{1 + \alpha T_1} = \frac{l}{L} = n\frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T};$$

de là nous concluons

$$1 + \alpha T_2 = 1 + \alpha t.$$

Donc l'air reprend bien sa température initiale en même temps qu'il reprend son volume. La quantité de chaleur absorbée dans cette seconde opération sera donc

$$\chi_1 = \frac{A l D_0 c}{1 + \alpha t}(t - T_1),$$

ou bien

$$\chi_1 = \frac{A l D_0 c}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{n}\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}\right).$$

Il nous reste à évaluer la chaleur fournie par le foyer; désignons-la par Q, nous aurons

$$Q = \frac{A l D_0 c}{1 + \alpha t}(T - \tau);$$

par suite,

$$Q = \frac{A l D_0 c}{\alpha}\left(\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} - n^\beta\right).$$

La perte de chaleur sera donc donnée par la formule suivante :

$$Q + \chi_1 - \chi = \frac{A l D_0 c}{\alpha}\left[\beta\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} - n^\beta + 1\right],$$

ou bien par

$$Q + \chi_1 - \chi = \frac{D_0 c \beta}{H \alpha}(\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1).$$

Ainsi, la perte de chaleur est proportionnelle au travail produit, et l'équivalent mécanique d'une calorie est toujours donné par la formule

$$E = \frac{H \alpha}{D_0 c \beta}.$$

TROISIÈME PÉRIODE. — DÉTENTE DE L'AIR.

§ X. — *Longueur* L_1 *occupée par l'air après la détente.*

Appelons $L + y$ la longueur occupée par l'air à un instant quelconque de la détente, et H' sa force élastique; nous savons que

$$\frac{H'}{nH} = \left(\frac{L}{L+y}\right)^{\gamma}.$$

Supposons la détente poussée jusqu'à mH; nous aurons à ce moment

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{L}{L_1}\right)^{\gamma};$$

donc

$$L_1 = L\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{l}{n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t},$$

ou bien

(75) $$L_1 = \frac{l}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}.$$

§ XI. — *Température* Θ *après la détente.*

Cette température est immédiatement donnée par les formules (35) de la première Partie, et nous avons

(76) $$\frac{1+\alpha\Theta}{1+\alpha T} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\beta},$$

ou bien

(77) $$\frac{1+\alpha\Theta}{1+\alpha t} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}.$$

§ XII. — *Travail* $\mathfrak{T}_3$ *de l'air pendant la détente.*

Le travail élémentaire est

$$A(H' - H)\,dy;$$

donc le travail total sera

$$\mathfrak{T}_3 = \mathrm{A}\int_0^{\mathrm{L}_1-\mathrm{L}} (\mathrm{H}' - \mathrm{H})dy = \mathrm{A}\int_0^{\mathrm{L}_1-\mathrm{L}} \mathrm{H}'dy - \mathrm{AH}(\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}).$$

En remplaçant H′ par sa valeur, nous pouvons effectuer la quadrature, et nous trouvons, après quelques réductions faciles,

$$(78)\qquad \mathfrak{T}_3 = \mathrm{AH}l\,\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\left[\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{n} - \left(\frac{m}{n}\right)^\beta\left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{m}\right)\right],$$

ou

$$(79)\qquad \mathfrak{T}_3 = \frac{\mathrm{AH}l}{\beta}\,\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\left[\frac{1}{\gamma} + \frac{\beta}{n} - \left(\frac{m}{n}\right)^\beta\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\beta}{m}\right)\right],$$

qui ne contient que les données.

Si l'on combine les valeurs de $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, on obtient

$$(80)\quad \mathfrak{T}_3 + \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1 = \frac{\mathrm{AH}l}{\beta}\left\{\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\left[1 - \left(\frac{m}{n}\right)^\beta\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\beta}{m}\right)\right] - n^\beta + 1\right\}$$

pour le travail utilisable théorique, dans une machine qui se bornerait au travail de la pleine pression et de la détente.

§ XIII. — *Perte de chaleur due au travail.*

Après la détente, chauffons l'air à volume constant jusqu'à ce qu'il ait repris la force élastique atmosphérique. Pour déterminer sa température Θ′ après la production de cet effet, nous recourrons aux formules déjà employées, et nous aurons

$$\frac{1+\alpha\Theta'}{1+\alpha\Theta} = \frac{1}{m};$$

d'où

$$\frac{1+\alpha\Theta'}{1+\alpha t} = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta \frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}.$$

La quantité de chaleur donnée sera

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{A}l\mathrm{D}_0c'}{1+\alpha t}(\Theta' - \Theta),$$

ou bien

$$X = \frac{A l D_0 c}{\gamma\alpha} \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} \left(\frac{m}{n}\right)^\beta \left(\frac{1}{m} - 1\right).$$

Actuellement refroidissons doucement et à pression constante, de manière à ramener l'air au volume qu'il avait à l'origine. On peut prouver facilement qu'il reprendra en même temps sa température primitive t. En effet, désignons par Θ'' la température finale après cette opération, nous aurons

$$l = L_1 \frac{1 + \alpha\Theta''}{1 + \alpha\Theta'};$$

donc

$$\frac{1 + \alpha\Theta'}{1 + \alpha\Theta''} = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} = \frac{1 + \alpha\Theta'}{1 + \alpha t},$$

d'après la formule ci-dessus; donc

$$\Theta'' = t. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La quantité de chaleur enlevée pendant cette opération sera

$$X_1 = \frac{A l D_0 c}{1 + \alpha t}(\Theta' - t),$$

ou bien

$$X_1 = \frac{A l D_0 c}{\alpha}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} - 1\right].$$

La perte de chaleur sera donc donnée par la formule suivante, après quelques réductions faciles,

$$Q + X - X_1 = \frac{A l D_0 c}{\alpha}\left\{\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}\left[1 - \left(\frac{m}{n}\right)^\beta\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\beta}{m}\right) - n^\beta + 1\right]\right\},$$

ou bien par

$$Q + X - X_1 = \frac{D_0 c \beta}{H\alpha}(\varpi_3 + \varpi_2 - \varpi_1),$$

ce qui prouve l'exactitude de nos formules.

QUATRIÈME PÉRIODE. — REFROIDISSEMENT DE L'AIR.

§ XIV. — *Pression après le refroidissement.*

Admettons que le réfrigérant ramène l'air de Θ à θ, et désignons par h la force élastique produite, nous aurons, par les formules de Laplace (33) :

$$hV = k(1 + \alpha\theta)$$

et

$$mHV = k(1 + \alpha\Theta),$$

car nous refroidissons à volume constant V; donc

$$\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha\Theta} = \frac{1}{m}\frac{h}{H}; \tag{81}$$

d'ailleurs

$$\frac{1 + \alpha\Theta}{1 + \alpha T} = \left(\frac{m}{n}\right)^\beta;$$

donc

$$\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha T} = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta \frac{h}{H},$$

d'où

$$\frac{h}{H} = m\left(\frac{n}{m}\right)^\beta \frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha T}. \tag{82}$$

§ XV. — *Calories prises par le réfrigérant.*

Nous avons désigné ce nombre de calories par Q_1. Il est clair que le refroidissement s'opérant sous volume constant,

$$Q_1 = AlDc'(\Theta - \theta),$$

d'où

$$Q_1 = \frac{AlDc}{\gamma\alpha}(1 + \alpha t)\left[\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta - \frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha t}\right]. \tag{83}$$

§ XVI. — *Travail de l'atmosphère, l'air s'échauffant par compression.*

Après le refroidissement, l'atmosphère presse sur la tête du piston et produit un travail utilisable, que nous allons calculer. Le piston part de la position G; soit

$$u$$

le chemin parcouru au bout d'un temps quelconque. Le travail élémentaire sera

$$A(H - h')\,du;$$

donc le travail total sera donné par l'intégrale

$$\mathfrak{T}_4 = AHL_2 - A\int_0^{L_2} h'\,du;$$

h' représente la force élastique variable de l'air intérieur. Pour évaluer h' en fonction de u, il faut recourir à une formule de Laplace, déjà employée, et l'on obtient alors

$$\frac{h'}{h} = \left(\frac{L_1}{L_1 - u}\right)^\gamma,$$

et, par substitution,

$$\mathfrak{T}_4 = AHL_2 + \frac{AHL_1}{\gamma - 1}\frac{h}{H} - \frac{AHL_1}{\gamma - 1}\frac{h}{H}\left(\frac{L_1}{L_1 - L_2}\right)^{\gamma - 1}.$$

Nous pouvons nous débarrasser de L_2 au moyen de l'équation précédente en y faisant

$$h' = H,$$

car elle donne alors

$$\frac{H}{h} = \left(\frac{L_1}{L_1 - L_2}\right)^\gamma,$$

d'où nous concluons

$$(84) \qquad \mathfrak{T}_4 = AHL_1\left[1 + \frac{1}{\gamma - 1}\frac{h}{H} - \frac{1}{\beta}\left(\frac{h}{H}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Si maintenant nous mettons pour L_1 et $\frac{h}{H}$ leurs valeurs, nous obtenons, après quelques réductions faciles,

$$(85)\qquad \mathfrak{T}_4 = \mathrm{AH}l\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta} + \frac{1}{\gamma-1}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{m}\right)^{\beta}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta^2}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Telle est la formule de l'effet dû à la condensation quand on admet que l'air s'échauffe pendant la compression.

§ XVII. — *Course du piston dans cette hypothèse.*

Cette course L_2 se détermine facilement au moyen d'une formule ci-dessus, et nous obtenons d'abord

$$L_2 = L_1\left[1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right];$$

puis, en remplaçant L_1 et L par leurs valeurs,

$$(86)\qquad L_2 = l\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta} - \left(\frac{1}{m}\right)^{\beta}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Cette formule ne renferme plus que les données.

§ XVIII. — *Température de l'air après le travail.*

Nous avons désigné cette température par Θ_1, et nous l'obtenons par la formule

$$\frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha\theta} = \left(\frac{H}{h}\right)^{\beta}.$$

et, en remplaçant h par sa valeur,

$$(87)\qquad \frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha\theta} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\beta}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta^2}\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\beta}.$$

§ XIX. — *Chaleur emportée par l'air sortant de la machine dans le cas du réfrigérant instantané.*

Nous avons désigné cette chaleur par Q_2. Pour l'évaluer, refroidissons l'air à pression constante; il dégagera un nombre de calories donné par

$$Q_2 = \mathrm{A}\,l\,\mathrm{D}c(\Theta_1 - t),$$

ou bien

(88) $$Q_2 = \frac{\mathrm{A}\,l\,\mathrm{D}c}{\alpha}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\beta}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta'}\left(\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha\theta}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha t} - 1\right].$$

§ XX. — *Travail de l'atmosphère dans le cas d'un réfrigérant continu.*

Pendant que l'atmosphère travaille par la descente du piston, nous pouvons admettre que l'air situé au-dessous est sans cesse en contact avec un réfrigérant qui le maintienne à la température θ. Il est soumis, dans sa compression, à la loi de Mariotte.

Le travail élémentaire, à un instant quelconque, est encore

$$\mathrm{A}(\mathrm{H} - h')\,du;$$

donc aussi le travail total est encore représenté par l'intégrale

(89) $$\mathcal{T}'_4 = \mathrm{AHL}'_2 - \mathrm{A}\int_0^{\mathrm{L}'_2} h'\,du;$$

mais les valeurs de L'_2 et de h' sont différentes, et l'on a pour h'

(90) $$\frac{h'}{h} = \frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_1 - u}.$$

Substituons, et l'équation (89) devient, après une intégration facile,

$$\mathcal{T}'_4 = \mathrm{AHL}'_2 - \mathrm{AHL}_1\frac{h}{\mathrm{H}}\,\mathcal{L}\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}'_2}.$$

$\mathcal{L}$ désigne un logarithme népérien.

La quantité L'_2 se détermine par l'équation (90), en y faisant $h' = H$; elle donne

$$\frac{L_2}{L_1} = 1 - \frac{h}{H};$$

par suite,

$$(91) \qquad \mathfrak{T}'_4 = AHL_1\left[1 - \frac{h}{H} - \frac{h}{H}\,\mathfrak{L}\,\frac{H}{h}\right].$$

Pour n'y voir apparaître que les données, il suffit de remplacer L_1 et h par leurs valeurs déjà trouvées, et il vient alors

$$(92) \quad \mathfrak{T}'_4 = AHl\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\,\mathfrak{L}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\right\},$$

ou bien

$$(93) \quad \mathfrak{T}'_4 = AHl\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\,\mathfrak{L}\,10 \,.\, \log\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\right\},$$

où

$$\mathfrak{L}\,10 = 2,302\,.\,5851,$$

et log désigne un logarithme vulgaire.

§ XXI. — *Course du piston dans le cas du réfrigérant continu.*

Cette course est L'_2, et nous avons, d'après les calculs du paragraphe précédent,

$$(94) \qquad L'_2 = L_1\left(1 - \frac{h}{H}\right),$$

ou bien

$$(95) \qquad L'_2 = l\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right],$$

qui ne contient que les données.

§ XXII. — *Quantité de chaleur enlevée par le réfrigérant continu.*

Pour déterminer cette quantité de chaleur appelée Q'_1, faisons agir le réfrigérant par discontinuité, mais à des intervalles infiniment rapprochés : la limite de la somme des quantités de chaleur enlevées sera la quantité Q'_1 que nous cherchons.

Considérons le piston à une distance u de son point de départ. Admettons qu'il parcoure du, sans que le réfrigérant refroidisse l'air intérieur; désignons par τ l'excès de température qu'il prend, nous aurons

$$\frac{1+\alpha(\theta+\tau)}{1+\alpha\theta} = \left(\frac{L_1-u}{L_1-u-du}\right)^{\gamma-1},$$

d'où

$$\frac{\alpha\tau}{1+\alpha\theta} = (\gamma-1)\frac{du}{L_1-u},$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur. De là nous concluons

(96) $$\tau = (\gamma-1)\frac{1+\alpha\theta}{\alpha}\,\frac{du}{L_1-u}.$$

Faisons maintenant agir le réfrigérant sans modifier le volume pour ramener l'air à θ, nous enlèverons la quantité de chaleur

$$q'_1 = \mathrm{A}l\mathrm{D}c'\tau;$$

faisons la somme de ces quantités depuis $u=0$ jusqu'à $u=L'_2$, il viendra

$$Q'_1 = \frac{\mathrm{A}l\mathrm{D}c\beta}{\alpha}(1+\alpha\theta)\,\mathcal{L}\frac{L_1}{L_1-L_2},$$

ou encore

(97) $$Q'_1 = \frac{\mathrm{A}l\mathrm{D}c\beta}{\alpha}(1+\alpha\theta)\,\mathcal{L}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha\theta}\right].$$

§ XXIII. — *Chaleur emportée par l'air sortant de la machine dans le cas d'un réfrigérant continu.*

L'air sort, dans ce cas, à la pression H et à la température θ; imaginons qu'il se refroidisse jusqu'à prendre la température t en gardant la même pression, il dégagera la même quantité de chaleur

$$Q'_2 = A l D c (\theta - t),$$

ou bien

$$(98) \qquad Q'_2 = \frac{A l D c}{\alpha}(1 + \alpha t)\left(\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha t} - 1\right).$$

§ XXIV. — *Travail utilisable total dans le cas d'un réfrigérant instantané.*

Nous avons désigné par U cet effet, et nous le déterminerons par l'équation

$$U = \mathfrak{T}_4 + \mathfrak{T}_3 + \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1,$$

qui devient, en substituant pour chaque $\mathfrak{T}$ sa valeur trouvée précédemment,

$$(99) \quad \left\{ \begin{aligned} U = \frac{AHl}{\beta}\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}&\left[1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta} + \frac{1}{\gamma}\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha T} - \left(\frac{1}{m}\right)^{\beta}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta^2}\left(\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right] \\ &- \frac{AHl}{\beta}(n^{\beta} - 1). \end{aligned} \right.$$

§ XXV. — *Chaleur totale perdue par l'air dans le cas d'un réfrigérant instantané.*

Il est bien évident que la chaleur perdue est la différence entre la chaleur donnée Q et l'ensemble des deux quantités de chaleur laissées au réfrigérant et abandonnées à l'air extérieur par l'air chaud sortant de la machine; donc

$$\mathfrak{P} = Q - Q_1 - Q_2,$$

ou bien

$$(100)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \dfrac{A\,l\,D_0\,c}{\alpha}\,\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1 - \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}\,\dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \left(\dfrac{1}{m}\right)^{\beta}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta}\left(\dfrac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\right)\right] \\ \qquad - \dfrac{A\,l\,D_0\,c}{\alpha}\,(n^{\beta} - 1). \end{cases}$$

On voit encore par cette formule que

$$(101)\qquad \mathfrak{P} = \frac{D_0 c \beta}{H \alpha}\,U = \frac{U}{E}.$$

§ XXVI. — *Travail total utilisable dans le cas d'un réfrigérant continu.*

Cette quantité U′ s'obtient immédiatement au moyen de la formule

$$U' = \mathfrak{T}'_4 + \mathfrak{T}_3 + \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$$

qui devient, après réduction,

$$(102)\quad \begin{cases} U' = AHl\,\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\gamma - 1}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta} - \dfrac{1+a\theta}{1+\alpha T} - \dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\,\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta}\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\right\} \\ \qquad - \dfrac{AHl}{\beta}\,(n^{\beta} - 1). \end{cases}$$

§ XXVII. — *Perte totale de chaleur faite par l'air chaud après son passage dans la machine à réfrigérant continu.*

Cette perte est évidemment donnée par la formule suivante :

$$\mathfrak{P}' = Q - Q_1 - Q'_1 - Q'_2,$$

qui donne, après substitution et réduction,

$$(103)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}' = \dfrac{A\,l\,D_0\,c}{\alpha}\,\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{1 - \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta} - \beta\,\dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right. \\ \qquad\qquad \left. - \beta\,\dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\,\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta}\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\right\} \\ \qquad - \dfrac{A\,l\,D_0\,c}{\alpha}\,(n^{\beta} - 1). \end{cases}$$

Nous trouvons encore

$$\mathfrak{T}_{,} = \frac{D_0 c \beta}{H \alpha} U' = \frac{U'}{E}.$$

§ XXVIII. — *Fraction de la chaleur totale transformée en travail utile.*

Si nous désignons par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ ces deux fractions dans les deux cas considérés, nous obtenons les deux formules

$$\mathcal{F} = \frac{\beta}{AHl} \frac{U}{\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t} - n^{\beta}} \tag{104}$$

et

$$\mathcal{F}' = \frac{\beta}{AHl} \frac{\beta}{\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t} - n^{\beta}}, \tag{105}$$

ou bien encore

$$\mathcal{F} = \frac{F(T)}{1 - n^{\beta} \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}} \tag{106}$$

et

$$\mathcal{F}' = \frac{F_1(T)}{1 - n^{\beta} \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}}, \tag{107}$$

en posant, pour abréger,

$$\left\{ \begin{aligned} F(T) = & \left[1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta} + \frac{1}{\gamma}\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \left(\frac{1}{m}\right)^{\beta}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta^2}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \right] \\ & - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}(n^{\beta} - 1) \end{aligned} \right. \tag{108}$$

et

$$\left\{ \begin{aligned} F_1(T) = & \left[1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta} - \beta\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \beta\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\mathfrak{L}.\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta} \right] \\ & - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}(n^{\beta} - 1). \end{aligned} \right. \tag{109}$$

On voit que $\mathfrak{F}$ augmente avec U si le dénominateur reste constant; mais il faut remarquer que U dépend, ainsi que le dénominateur, du degré de compression; on ne peut donc pas affirmer que $\mathfrak{F}$ augmente généralement quand U augmente. La fonction $\mathfrak{F}$ est, comme l'on voit, fort complexe; aussi procéderons-nous par la mise en nombre pour en saisir les variations.

DISCUSSION DES FORMULES QUI DONNENT U ET U'.

§ XXIX. — *Influence de la détente sur* U.

Dérivons par rapport à m, nous obtenons l'équation

$$(110)\qquad D_m U = \frac{AHl}{\gamma}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{1-\frac{1}{\gamma^2}} n^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right].$$

On voit que cette dérivée s'annule pour une valeur de m donnée par la formule

$$(111)\qquad m = n^{\frac{1}{\gamma+1}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma^2-1}}.$$

D'ailleurs, pour une valeur de m inférieure, la dérivée est positive; pour une valeur de m supérieure, la valeur est négative; donc U atteint, pour cette valeur de m, un maximum, toutes choses égales d'ailleurs.

Le dénominateur de $\mathfrak{F}$ ne renferme pas m; donc nous sommes sûrs que $\mathfrak{F}$ augmente quand m tend vers la valeur fournie par l'équation (111), toutes les autres quantités restant les mêmes.

Nous devons toujours nous reporter à cette fraction, car elle exprime en réalité le rendement de la machine. En effet, le calorique mis dans le foyer peut par nous être assimilé à une quantité de travail : plus une machine en utilisera, plus elle sera parfaite; or la quantité utilisée est représentée par $\mathfrak{F}$.

§ XXX. — *Influence du degré de compression sur* U.

Si nous prenons la dérivée de U par rapport à n, nous trouvons

$$(112)\quad \left\{ \begin{aligned} D_n U = \frac{\mathrm{AH}l}{\gamma}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\Bigg[& m^{\beta}\left(\frac{1}{n}\right)^{2\beta} \\ & + (\gamma-1)\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta^2+\beta} - \gamma\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\Bigg]\left(\frac{1}{n}\right)^{1}. \end{aligned} \right.$$

On voit que cette dérivée s'annule pour une valeur de n satisfaisant à l'équation

$$(113)\qquad m^{\beta}\left(\frac{1}{n}\right)^{2\beta} + (\gamma-1)\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta^2+\beta} = \gamma\,\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}.$$

Comme, toutes choses égales d'ailleurs, le premier membre décroît d'une manière continue de ∞ à 0, lorsque n croît d'une manière continue de 0 à ∞, il n'existe qu'une racine réelle positive. D'un autre côté, la dérivée est positive lorsque n est inférieur à cette racine, et négative quand n la dépasse. Donc U a un maximum correspondant à la valeur de n donnée par l'équation (113).

Observons de plus que U est fonction des deux variables m et n, indépendantes entre elles. Par suite, pour trouver les valeurs de ces variables qui rendent U maximum, il faut égaler à zéro les dérivées partielles prises par rapport à ces variables; donc ces valeurs sont données par la résolution des équations (111) et (113). L'équation (111) est très-simple et permet d'éliminer m de l'équation (113). On trouve, après quelques calculs laborieux, mais que l'on voit se simplifier avec satisfaction :

$$(114)\qquad n = \left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\right)^{\frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}}\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}},$$

et ensuite

$$(115)\qquad m = \left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}}.$$

Pour être dans des conditions plus favorables encore et avoir la machine parfaite, faisons

$$\theta = t,$$

il viendra enfin

$$(116) \qquad n = \left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\right)^{\frac{\gamma^2}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}}$$

et

$$(117) \qquad m = \left(\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

§ XXXI. — *Valeur de U dans le cas où la détente correspond au maximum d'effet, le degré de compression étant choisi arbitrairement.*

Si dans la formule générale de U on substitue la valeur de m fournie par la valeur (111), on obtient l'équation

$$(118) \quad \left\{ \begin{aligned} U = {} & \frac{AHl}{\beta}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1+\frac{1}{\gamma}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}-\frac{\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}\right] \\ & -\frac{AHl}{\beta}(n^{\beta}-1). \end{aligned} \right.$$

et si, dans les mêmes circonstances, on suppose un réfrigérant parfait, c'est-à-dire $\theta = t$, on obtient le plus grand U possible :

$$(119) \quad \left\{ \begin{aligned} U = {} & \frac{AHl}{\beta}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1+\frac{1}{\gamma}\,\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}-\frac{\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\left(\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}\right] \\ & -\frac{AHl}{\beta}(n^{\beta}-1). \end{aligned} \right.$$

§ XXXII. — *Valeur de U dans le cas où la détente et le degré de compression correspondent au maximum d'effet utile.*

Pour trouver cette valeur de U, il suffit de remplacer, dans la formule (118), la valeur de n fournie par l'équation (114); après cette

substitution, il vient, pour U,

$$(120)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U} = \frac{\mathrm{AH}l}{\beta}\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\Bigg[1 &+ \frac{1+\alpha t}{1+\alpha\mathrm{T}} + \frac{1}{\gamma}\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}} \\ &- \frac{2\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1+\alpha t}{1+\alpha\mathrm{T}}\right)^{\frac{\gamma}{2\gamma+1}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{2\gamma+1}}\Bigg];\end{aligned}\right.$$

et si, dans les mêmes circonstances, on suppose un réfrigérant parfait, c'est-à-dire $\theta = t$, il viendra, pour la valeur maximum de U,

$$(121)\quad \mathrm{U} = \frac{\mathrm{AH}l}{\beta}\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\left[1 + \frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{1+\alpha t}{1+\alpha\mathrm{T}} - \frac{2\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1+\alpha t}{1+\alpha\mathrm{T}}\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma+1}}\right].$$

Cette dernière formule est celle qui donnera pour U le plus grand effet possible dans les circonstances où nous supposons que l'air chaud agisse.

§ XXXIII. — *Influence de la détente sur* U'.

En cherchant la dérivée de U' par rapport à m, nous trouvons

$$\mathrm{D}_m\mathrm{U}' = \frac{\mathrm{AH}l}{\gamma-1}\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\frac{1}{m}\left[\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}} - \left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\right];$$

nous voyons que cette dérivée devient nulle pour une valeur de m donnée par l'équation

$$(122)\qquad m = n\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

D'ailleurs la dérivée est positive pour une valeur inférieure, négative pour une valeur supérieure; donc cette valeur de m correspond à un maximum de U'.

§ XXXIV. — *Influence de la compression sur* U'.

Prenons la dérivée par rapport à n, et nous aurons

$$\mathrm{D}_n\mathrm{U}' = \frac{\mathrm{AH}l}{n^{\gamma}}\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\left[\frac{m^{\beta}}{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)^{2\beta} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta} - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha\mathrm{T}}\right].$$

Nous voyons que cette dérivée s'annule pour une valeur de n donnée par l'équation trinôme

$$(123)\qquad \frac{m^\beta}{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)^{2\beta}+\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}=\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}.$$

D'ailleurs une valeur de n inférieure rend la dérivée positive, une valeur supérieure rend la dérivée négative; donc cette racine correspond à un maximum de U′.

Si nous voulons rendre U′ aussi grand que possible, il faut résoudre les deux équations (122) et (123), et l'on trouvera les valeurs de m et de n qui satisfont à cette condition; ces valeurs sont fonctions de θ et de T, et sont données par les équations

$$(124)\qquad m^\beta=\frac{(1+\alpha\theta)^2}{(1+\alpha t)(1+\alpha T)}$$

et

$$(125)\qquad n^\beta=\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha t}.$$

Nous voyons que, dans le cas d'un réfrigérant parfait, c'est-à-dire qui rend $\theta=t$, ces valeurs de m et n deviennent

$$(126)\qquad m^\beta=\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T},$$

$$(127)\qquad n=1.$$

La machine remplissant toutes ces conditions est la plus parfaite possible, et l'on voit qu'elle n'est pas antre chose que la machine atmosphérique parfaite étudiée précédemment.

§ XXXV. — *Valeur de U′ dans le cas où la détente correspond au maximum d'effet utile, le degré de compression étant arbitrairement choisi.*

Substituons dans la valeur générale de U′ la valeur de m donnée par la formule (122); nous obtiendrons

$$(128)\qquad U'=\frac{AHl}{\beta}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{1-\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}-\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\,\mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\right\}-\frac{AHl}{\beta}(n^\beta-1),$$

et, si le réfrigérant est parfait, c'est-à-dire si $\theta = t$, nous aurons

$$(129)\quad U' = \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{1 - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T} - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\right]\right\} - \frac{AHl}{\beta}(n^{\beta} - 1).$$

§ XXXVI. — *Valeur de U′ dans le cas où la détente et le degré de compression correspondent au maximum d'effet utile.*

Nous déduirons cette valeur de l'équation (128), en y mettant pour n la valeur fournie par la formule (125); il nous vient, après réduction,

$$(130)\quad U' = \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{1 + \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T} - 2\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\mathcal{L}\left[\frac{(1+\alpha t)(1+\alpha T)}{(1+\alpha\theta)^2}\right]\right\},$$

et, dans le cas d'un réfrigérant parfait,

$$(131)\qquad U' = \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1 - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T} - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\mathcal{L}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\right].$$

Cette formule a été déjà trouvée dans la théorie des machines atmosphériques.

Nous n'ajouterons rien à ces développements analytiques, qui suffisent aux applications. Nous avons pu avec nos formules étudier sans peine des machines à cycles différents, et en particulier la machine Franchot dont M. Combes s'est occupé dans son *Exposé des principes de la théorie mécanique de la chaleur*. Les détails dans lesquels nous sommes entrés suffisent pour montrer la marche à suivre dans les divers cas.

Nous allons indiquer, par un exemple numérique, la portée de nos formules et leur utilité.

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

§ XXXVII. — *Machine dans laquelle l'air chauffé à 800 degrés serait préalablement comprimé à 4 atmosphères, et où la détente serait poussée jusqu'à la pression atmosphérique.*

M. Burdin a calculé, il y a longtemps déjà, les effets de cette machine, et il a même fait le projet détaillé des moyens pratiques de réalisation; la concordance des résultats donnés par mes formules avec ceux qu'il a trouvés d'une autre manière servira de preuve à tous mes calculs.

Nous supposons que la section de nos cylindres soit de 1 mètre carré, et que l'air primitivement introduit occupe une longueur de 1 mètre, de sorte que l'air dont nous cherchons le travail a primitivement pour volume 1 mètre cube. Ainsi, en nous reportant au § II, où se trouvent nos notations, nous faisons, dans nos formules :

$$\begin{array}{ll} A = 1, & \alpha = 0,003665, \\ l = 1, & \gamma = 1,41, \\ t = 10^\circ, & \beta = 0,290780, \\ T = 800^\circ, & H = 10331, \\ \theta = 100^\circ, & u = 4, \quad m = 1. \end{array}$$

Avec ces données nous trouvons :

Travail dépensé pour la compression préalable à froid, ou $\mathfrak{T}_1$ ..... $6043^{\text{kgm}},7$.
Travail de l'air à pleine pression pendant son échauffement, ou $\mathfrak{T}_2$. 17704^{kgm}
Travail de l'air pendant sa détente, poussée jusqu'à ce qu'il ait repris la pression atmosphérique, ou $\mathfrak{T}_3$ .... $15318^{\text{kgm}},6$.
Travail de l'atmosphère après le refroidissement intérieur, dans le cas où l'air se réchauffe, ou $\mathfrak{T}_4$ .... 2761^{kgm}.
Travail de l'atmosphère dans le cas où un réfrigérant continu empêche l'air intérieur de se réchauffer, ou $\mathfrak{T}'_1$ .... 6473^{kgm}

Travail utilisable de la machine, si l'on néglige l'effet dû à la condensation, ou $\mathfrak{T} + \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$ . . . . 27068$^{\text{kgm}}$.

Travail utilisable de la machine complète, dans le cas d'un réfrigérant instantané, ou U . . . . 29829$^{\text{kgm}}$.

Travail utilisable de la machine complète, dans le cas d'un réfrigerant continu . . . . 33541$^{\text{kgm}}$.

Nous trouvons encore :

Température après la compression, ou τ	150°.
Chaleur engendrée par la compression	14$^{\text{cal}}$,26.
Chaleur fournie par le foyer	192$^{\text{cal}}$,61.
Chaleur perdue par le travail $\mathfrak{T}_2$ à pleine pression	42$^{\text{cal}}$.
Température après la détente	444°.
Perte de chaleur due au travail de la détente $\mathfrak{T}_3$	36$^{\text{cal}}$,16.
Chaleur que l'air possède encore à la fin de sa détente	128$^{\text{cal}}$,70.
Force élastique après l'action du réfrigérant, ou h	0$^{\text{atm}}$,52.
Chaleur enlevée par le réfrigérant instantané	72$^{\text{cal}}$,36.
Température de l'air après le travail de l'atmosphère	178°.
Chaleur emportée par l'air sortant de la machine	49$^{\text{cal}}$,84.
Chaleur enlevée par le réfrigérant continu	14$^{\text{cal}}$,38.
Chaleur emportée par l'air sortant de la machine	26$^{\text{cal}}$,69.

De ce tableau, nous pouvons déduire les conséquences suivantes, que M. Burdin avait déjà signalées en partie dans les Notes que les *Comptes rendus* de 1835 et 1836 ont recueillies :

1° Si nous supposons réalisée une machine où l'on négligerait complétement l'effet $\mathfrak{T}_4$ ou $\mathfrak{T}'_4$ qu'on peut retirer de la pression atmosphérique après le refroidissement de l'air, et aussi le calorique qu'on peut reprendre à l'air quand il s'échappe de la machine, on voit que, pour une dépense de 193 calories, on obtient 27068 kilogrammètres de travail; si donc, pour brûler complétement et utilement le charbon, on se sert, comme air moteur, des produits mêmes de la combustion, 1 kilogramme de charbon produirait, dans cette machine, 6000 calories, et par conséquent . . . . 841492$^{\text{kgm}}$.
Mais, dans les meilleures machines de Cornouailles, on use 1 kilogramme de charbon par force de cheval et par heure; donc 1 kilogramme de charbon produit . . . . 270000$^{\text{kgm}}$.
D'où l'on voit que la machine théorique que nous étudions produit, à égale dépense de combustible . . . . 3,1 fois plus,
ou environ 3 fois plus que ces machines, dont il n'existe pas en France peut-être un seul modèle. Admettons maintenant, ce qui est reconnu

comme possible d'après les expériences d'Ericson, que l'on puisse reprendre une partie de la chaleur emportée par l'air au sortir de la machine, à savoir la chaleur (72 calories) déposée dans le réfrigérant, la dépense sera

$$193 - 72 = 121^{\text{cal}}.$$

Donc 1 kilogramme de charbon produirait, dans ce cas.......... 1 342 000$^{\text{kgm}}$.

Par suite, le rapport de notre machine à celle de Cornouailles devient environ.. 5.

Ce rapport est énorme sans doute, mais il est impossible de douter de sa vérité approximative, puisque nos calculs sont incontestables. On peut cependant objecter, avec M. Reech, que, dans le cas où le cylindre à comprimer l'air et celui qui renferme le piston moteur formeraient deux machines distinctes, le calcul de l'effet utile devrait se faire autrement dans la pratique. Le travail de la compression préalable devrait être multiplié par un coefficient supérieur à l'unité, celui que l'on retire de la dilatation et de la détente par un autre coefficient inférieur à l'unité, et c'est après ces opérations que l'on prendrait la différence. On comprend que le travail utilisable serait ainsi réduit dans une bien plus grande proportion que si l'on multipliait simplement la différence U par un coefficient de réduction inférieur à l'unité. L'objection nous paraît sérieuse, et mérite toute l'attention des praticiens; M. Burdin pense toutefois qu'en établissant une solidarité convenable entre le soufflet qui comprime et le piston moteur, comme dans l'une des machines connues d'Ericson, on peut se soustraire à l'influence désastreuse de la séparation des machines, signalée par M. Reech. Nous n'avons pas à exposer ici les moyens qu'il a imaginés pour cela.

2° Considérons maintenant la machine complète, où l'on utiliserait la pression atmosphérique en laissant l'air intérieur se réchauffer. La dépense serait, en ne reprenant à l'air sortant aucune chaleur,

$$193^{\text{cal}};$$

l'effet utilisable serait

$$29829^{\text{kgm}};$$

donc 1 kilogramme de charbon produirait

$$178974000^{\text{kgm}} : 193 = 927000^{\text{kgm}}.$$

Donc cette machine serait

$$3,4 \text{ fois}$$

plus avantageuse que les machines de Cornouailles.

Si nous admettons qu'on reprenne la chaleur déposée dans le réfrigérant, la dépense se réduit à 121 calories, et la machine devient

$$5,4 \text{ fois}$$

plus économique que la machine à vapeur de comparaison.

3° Considérons enfin la machine à réfrigérant continu, et admettons que nous abandonnions toute récurrence de calorique par un calcul analogue au précédent, nous trouverons que notre machine théorique vaut

$$3,8 \text{ fois}$$

les machines de Cornouailles. Si nous reprenons encore seulement le calorique déposé dans le réfrigérant instantané, ce rapport se transforme en cet autre :

$$6,2.$$

Toutefois les difficultés qui se présenteront pour réaliser cette conception d'un réfrigérant continu nous paraissent assez considérables pour qu'on doive se borner à la machine précédente, et même à celle qui n'utilise pas la pression atmosphérique, mais qui recueille, autant que possible, la chaleur que l'air emporte au sortir de la machine.

§ XXXVIII. — *Influence du degré de compression sur le rendement de la machine.*

Nous avons laissé les données exactement les mêmes que dans le cas précédent, et nous avons supposé successivement n égal à

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \text{ atmosphères.}$$

A l'aide des formules de notre Mémoire, nous avons pu former le tableau suivant pour la machine, où l'on néglige l'effet dû à la pression atmosphérique après le refroidissement de l'air détendu.

Influence du degré de compression.

VALEURS diverses de n.	VALEURS de $\mathfrak{T}_3+\mathfrak{T}_2-\mathfrak{T}_1$.	DÉPENSE de calorique.	CHALEUR laissée au réfrigérant.	RENDEMENT sans récurrence.	RENDEMENT avec récurrence.
atm	kgm	cal	cal		
1	0	234,25	147,21	0,00	0,00
2	16665	215,52	106,02	0,18	0,35
3	23479	202,68	85,47	0,27	0,47
4	27069	192,61	72,36	0,33	0,53
5	29163	184,20	62,89	0,37	0,56
6	30431	176,91	55,59	0,40	0,59
7	31197	170,43	49,72	0,43	0,61
8	31635	164,58	44,84	0,45	0,62
9	31847	159,24	40,69	0,47	0,64

Ce tableau suffit pour rendre manifestes plusieurs particularités intéressantes :

1° Les nombres de la seconde colonne ne croissent pas au delà de toute limite, et l'on sent même que le maximum doit être environ 32000 kilogrammètres. Le calcul algébrique fait voir en effet que la valeur de n qui correspond au maximum de $\mathfrak{T}_3+\mathfrak{T}_2-\mathfrak{T}_1$ est donnée par

$$n^{2\beta}=\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t};$$

réduite en nombre, cette formule conduit à

$$n=9^{\text{atm}},898.$$

2° Nous appelons *rendement de la machine* le rapport entre le travail fourni par la dépense d'une calorie et l'équivalent mécanique 424 kilogrammètres, qu'une machine parfaite donnerait par chaque calorie. On voit par la cinquième colonne que ce rendement croît sans

cesse avec le degré de compression. Toutefois, il ne croît pas au delà d'une certaine limite; car ce calcul donne pour ce rendement l'expression très-simple

$$1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}.$$

Or la plus grande compression qu'on puisse prendre pour une machine marchant à T°, c'est celle qui donnerait à l'air la température même T; cette compression est donnée par les formules

$$n^{\beta} = \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}, \qquad \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T}.$$

Donc le rendement a pour limite

$$1 - \frac{1 - \alpha t}{1 + \alpha T},$$

ou, en réduisant en nombre,

$$0,736.$$

3° On voit aussi par la dernière colonne que, si l'on tient compte de la récurrence, c'est-à-dire de la chaleur que l'on peut reprendre dans le réfrigérant, le rendement est toujours plus fort. Il augmente sans cesse; toutefois il n'augmente pas au delà de toute limite, et le calcul montre facilement qu'il ne peut pas dépasser

$$\frac{1 - \dfrac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T}}{1 - \dfrac{1}{\gamma}\,\dfrac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T}},$$

formule qui, réduite en nombre avec nos données, fournit

$$0,905.$$

Ce maximum correspond au cas où la compression fournit toute la chaleur, et où l'effet utile est nul.

4° Ainsi, d'une part, l'effet utile que l'on peut retirer d'un mètre

cube d'air augmente jusqu'à ce que la compression soit précisément la racine carrée de celle qui donnerait à l'air la température de 800 degrés; mais alors on ne retire que 0,47 ou, avec récurrence, 0,64 de la force motrice représentée par le calorique dépensé. D'autre part, si le degré de compression augmente toujours et se rapproche de 98 atmosphères, l'effet utile retiré d'un mètre cube d'air diminue et tend vers zéro, la dépense tend également vers zéro, et le rendement d'une calorie croît toujours, et par le fait la machine théorique est plus avantageuse. Toutefois elle devient, par compensation, de plus en plus encombrante, et dans la pratique il paraîtra bien préférable de sacrifier un peu de la quantité de rendement à l'avantage de produire plus de travail par coup de piston.

§ XXXIX. — *Influence de la détente sur l'effet utile de la machine à 800 degrés et à 4 atmosphères de compression.*

En répétant sur la formule qui donne

$$\mathfrak{T}_3 + \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$$

un calcul de dérivation par rapport à m analogue à celui qui a été fait pour U', nous trouvons que l'effet utile atteint son maximum lorsque la détente m est poussée jusqu'à l'unité. Ce résultat était facile à prévoir. Nous nous sommes donc placés, dans nos calculs numériques, dès l'abord, le plus avantageusement possible, quant à la détente.

L'exemple détaillé que nous venons de traiter suffit pour faire comprendre l'usage de nos formules, et pour donner une idée assez nette des résultats qu'on doit obtenir en variant les circonstances dans lesquelles la machine opère.

CONCLUSION.

De notre étude il résulte donc :

1° Que les machines à vapeur les plus parfaites qu'on ait pu imaginer n'ont qu'un rendement de 0,11, c'est-à-dire ne transforment en travail mécanique que 11 pour 100 du calorique qu'elles reçoivent;

2° Que la théorie mécanique, pouvant aborder et résoudre complétement le problème de l'air chaud employé comme agent moteur, indique positivement des conditions réalisables, dans lesquelles le rendement d'une machine à gaz serait jusqu'à près de 6 fois plus considérable; que, par conséquent, l'industrie, éclairée par notre calcul, peut espérer d'arriver dans cette voie à des moteurs à feu très avantageux par rapport à ceux qui sont aujourd'hui en usage;

3° Qu'il est impossible, quel que soit le cycle adopté, de transformer complétement en travail la chaleur dépensée;

4° Que, s'il est difficile de résoudre pratiquement le problème de la transformation du calorique en travail, on doit regarder le problème inverse de la transformation du travail mécanique en chaleur comme très-bien résolu par MM. Mayer et Beaumont. En effet, en nous reportant aux deux expériences faites par M. Morin [*], et consignées dans son Rapport, nous voyons que, dans le premier cas, un travail de

$$2558448^{\text{kgm}}$$

a produit

$$3113^{\text{cal}},70;$$

et, par suite, un travail moteur de 424 kilogrammètres a produit

$$0^{\text{cal}},50.$$

Dans le second cas, où la vitesse de rotation est plus grande, le travail moteur a été, par heure, de

$$2027700^{\text{kgm}},$$

et la production de chaleur, par heure,

$$3847^{\text{cal}},10;$$

donc 424 kilogrammètres ont produit, non pas 1 calorie, mais

$$0^{\text{cal}},80.$$

Donc la machine peut avoir le rendement énorme de 80 pour 100;

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLII, p. 719.

donc, industriellement parlant, elle peut être regardée comme parfaite. Sans doute M. Morin a parfaitement raison de croire que cette invention n'est pas aussi utile que les inventeurs l'ont prétendu; mais il n'en est pas moins vrai qu'ils ont résolu avec un rare bonheur le problème de la transformation du travail en chaleur. Peu importe l'utilité de la solution.

Si M. Morin a jugé si désavantageusement leur ingénieux appareil, c'est qu'il a comparé le calorique employé à faire mouvoir la machine à vapeur qui fait tourner le cône frotteur de MM. Mayer et Beaumont à la chaleur donnée par cette dernière machine. Comme la machine à vapeur ne transmet qu'un dixième de ce qu'elle reçoit à la manivelle du cône, il n'est pas étonnant que la machine à frottement ne donne qu'un vingtième de cette chaleur; c'est bien la moitié de ce qu'elle reçoit.

Pour porter un jugement équitable, il me semble qu'il faut procéder autrement, et, ainsi que je l'ai fait, calculer, d'une part, le travail dépensé pour la faire tourner, et, de l'autre, le calorique produit par cette dépense.

NOTE ADDITIONNELLE.

SUR LE RENDEMENT DES MACHINES A AIR CHAUD EN GÉNÉRAL.

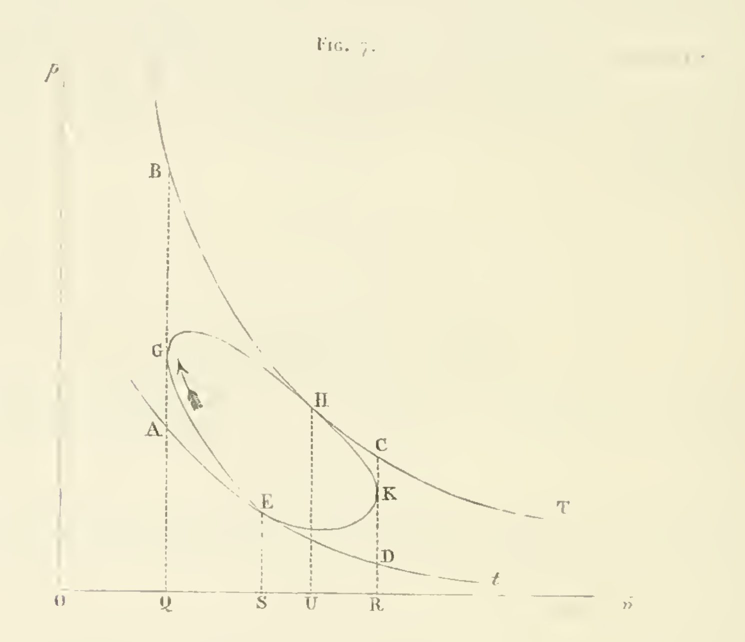
Nous avons pris dans le cours de notre travail un cycle particulier pour étudier le rendement d'une machine à air; on peut arriver à un théorème général important donnant une limite du rendement d'une machine quelconque.

Imaginons que l'air d'une machine suive le cycle d'états EGHKE tout à fait quelconque. Il part de l'état E qui correspond à sa température la plus basse t, il arrive par la courbe EGH à la température la plus élevée T, puis il revient HKE à sa température la plus basse.

Inscrivons ce cycle entre les deux courbes isothermiques t et T, et entre deux parallèles à l'axe Op. Appelons :

v_0 le volume OS qui correspond à l'état E,
v_1 le volume OQ,
v_2 le volume OU qui correspond à l'état H,
V le volume OR,
p_1 l'ordonnée de la courbe GHK,
p l'ordonnée de la courbe GEK,
Q_1 la dépense de chaleur positive ou négative dans le parcours de EG,
Q_2 la dépense dans le parcours de GH,
Q_3 la dépense dans le parcours de HK,
Q_4 la dépense dans le parcours de KE,
τ_0 la température en G,
τ_1 la température en K;

Fig. 7.



et remarquons que la formule (24) de notre Mémoire est générale.

Cela posé, nous aurons, en vertu de cette formule,

$$Q_1 = \frac{D_0 c'}{H\alpha}(v_1 p_1 - v_0 p_0) + \frac{D_0(c - c')}{H\alpha}\int_{v_0}^{v_1} p\,dv.$$

ou bien

$$Q_1 = D_0 c'(\tau_1 - t) - \frac{1}{E}\int_{v_1}^{v_0} p\,dv;$$

de même

$$Q_2 = D_0 c'(T - \tau_1) + \frac{1}{E}\int_{v_1}^{v_2} p'\,dv,$$

$$Q_3 = -D_0 c'(T - \tau_0) + \frac{1}{E}\int_{v_2}^{V} p'\,dv,$$

$$Q_4 = -D_0 c'(\tau_0 - t) - \frac{1}{E}\int_{v_0}^{V} p\,dv.$$

La chaleur transformée sera donc

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = {} & D_0 c'(T - t) + \frac{1}{E}\int_{v_1}^{V} p'\,dv \\ & - D_0 c'(T - t) - \frac{1}{E}\int_{v_1}^{V} p\,dv. \end{aligned}$$

Or la chaleur dépensée est

$$D_0 c'(T - t) + \frac{1}{E}\int_{v_1}^{V} p'\,dv,$$

en faisant la somme de toutes les quantités positives des valeurs Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, et en admettant qu'il n'y ait pas de récurrence. Le rendement de la machine sera donc

$$\mathfrak{R} = 1 - \frac{D_0 c'(T - t) + \frac{1}{E}\int_{v_1}^{V} p\,dv}{D_0 c'(T - t) + \frac{1}{E}\int_{v_1}^{V} p'\,dv}.$$

Négligeons aux deux termes de la fraction la quantité $D_0 c'(T - t)$: nous la rendons plus petite, par suite la différence à l'unité augmentera; donc nous aurons

$$\mathfrak{R} < 1 - \frac{\int_{v_1}^{V} p\,dv}{\int_{v_1}^{V} p'\,dv}.$$

Mais les intégrales des deux termes représentent des aires faciles à voir, et l'on a

$$\mathcal{R} < 1 - \frac{\text{aire QGEKR}}{\text{aire QGHKR}}.$$

Remplaçons enfin le numérateur par la quantité moindre aire QADR, et le dénominateur par la quantité supérieure aire QBCR, nous aurons *à fortiori*

$$\mathcal{R} < 1 - \frac{\text{aire QADR}}{\text{aire QBCR}}.$$

Mais cette dernière limite est facile à évaluer, et l'on a

$$\text{aire QADR} = \mathrm{H}(1 + \alpha t)\,\mathcal{L}\frac{\mathrm{V}}{v_1}$$

et

$$\text{aire QBCR} = \mathrm{H}(1 + \alpha \mathrm{T})\,\mathcal{L}\frac{\mathrm{V}}{v_1};$$

donc enfin

$$\mathcal{R} < 1 - \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha \mathrm{T}},$$

ou bien

$$\mathcal{R} < \frac{\alpha(\mathrm{T} - t)}{1 + \alpha \mathrm{T}},$$

ou encore

$$\mathcal{R} < \frac{\mathrm{T} - t}{\frac{1}{\alpha} + \mathrm{T}}.$$

Remarquons maintenant que ce rendement est celui de la machine dont l'air suivrait le cycle DABCD, dans le cas où l'on supposerait qu'il y a récurrence, ce qui serait le cas le plus avantageux. En effet :

1° De D en A, l'air sera comprimé à température constante t, la chaleur absorbée par le réfrigérant sera totalement perdue et sera donnée par l'expression (form. 40)

$$\mathrm{X}_1 = \frac{1}{\mathrm{E}}\mathrm{H}(1 + \alpha t)\,\mathcal{L}\frac{\mathrm{V}}{v_1};$$

2° De A en B, l'air sera chauffé à volume constant v_1, et l'on dépensera

$$X_2 = D_0 c'(T - t);$$

3° De B en C, l'air sera détendu à température constante T; la dépense de chaleur pour entretenir cette température sera

$$X_3 = \frac{1}{E} H'(1 + \alpha T) \log \frac{V}{v_1};$$

4° De C en D, l'air sera refroidi à volume constant V, et l'on recueillera la quantité de chaleur X_2 que l'on avait dépensée de A en B.

Donc, si l'on imagine que la machine soit à récurrence parfaite, la dépense sera X_3, et la chaleur transformée $X_3 - X_1$; donc le rendement sera

$$\rho = \frac{X_3 - X_1}{X_3} = 1 - \frac{X_1}{X_3},$$

ou bien

$$\rho = 1 - \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T}.$$

Remarquons, en outre, que ρ est indépendant des volumes entre lesquels se meut le gaz et dépendant seulement des températures extrêmes; donc nous pouvons formuler les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Toutes les machines parfaites, ayant pour cycle un quadrilatère curviligne formé de deux courbes isothermiques t, T et de deux ordonnées quelconques, ont même rendement. Ce rendement est égal à l'excès de l'unité sur le rapport des binômes de dilatation*
$\rho = 1 - \dfrac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T}$.

Théorème II. — *Une machine correspondante à un cycle fermé quelconque a un rendement inférieur à celui d'une machine parfaite fonctionnant entre les mêmes températures.*

Remarque. — Le rendement maximum peut se mettre sous la forme

$$\rho = \frac{(\alpha + \alpha T) - (1 + \alpha t)}{1 + \alpha T} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} + T\right) - \left(\frac{1}{\alpha} + t\right)}{\frac{1}{\alpha} + T}.$$

Appelons avec quelques auteurs *température absolue* la température comptée à partir de $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\circ}$, et désignons par T_a, t_a ces températures; on aura enfin

$$\rho = \frac{T_a - t_a}{T_a} = 1 - \frac{t_a}{T_a}.$$

C'est la formule donnée par la plupart de ceux qui ont écrit sur la thermodynamique. Elle est simple; mais elle n'est pas d'un calcul plus facile que la formule primitive.

Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

PREMIER MÉMOIRE [*].

DES TIGES.

Poisson et Cauchy ont les premiers essayé de déduire des formules de la théorie générale de l'élasticité les lois approchées de la flexion des tiges ou verges minces, lois qu'on avait obtenues jusque-là en supposant que les fibres longitudinales de ces corps restent constamment, pendant la flexion, parallèles entre elles et perpendiculaires aux sections qui leur étaient primitivement normales, et en admettant aussi que ces fibres résistent à l'extension ou à la compression, comme si chacune d'elles était isolée de ses voisines. L'hypothèse sur laquelle Poisson et Cauchy se sont appuyés, et dont le premier a déduit en outre une théorie de la torsion des verges rondes et le second un essai de la théorie de celle des verges rectangulaires, consiste à admettre que les forces élastiques exercées sur les éléments plans menés à l'intérieur de la tige sont développables en séries très-convergentes, suivant les puissances entières des petites coordonnées transversales de ces points, de manière qu'on puisse, dans toute relation, ne conserver, parmi les termes qui y subsistent, que ceux d'un seul degré ou au plus des deux degrés les moins élevés. Or cette hypothèse, qui n'est nullement évidente *à priori*, doit être abandonnée, du

[*] Présenté à l'Académie des Sciences, le 3 avril 1871, et analysé au *Compte rendu* de la séance de ce jour. (Voir *Comptes rendus*, t. LXXII, p. 407.)

moins en général; car elle est en contradiction avec des formules rigoureuses que M. de Saint-Venant a obtenues pour certains modes très-naturels d'application des actions extérieures, supposées exercées seulement sur les deux bases des tiges; et elle s'est trouvée aussi, dans divers cas, tels que celui de la torsion des tiges carrées, en désaccord avec l'expérience (*voir* le *Cours de Mécanique appliquée de Navier*, annoté par M. de Saint-Venant, t. I, 4^e Appendice, p. 617 à 645).

Le mode d'application, étudié par ce dernier géomètre, des forces qui agissent sur les extrémités des tiges, est celui pour lequel les fibres n'exercent les unes sur les autres que des actions dirigées suivant leurs tangentes, et ont leur allongement par unité de longueur, variable, sur toute l'étendue de chaque section normale, en fonction linéaire des coordonnées transversales. M. de Saint-Venant, se bornant aux tiges homogènes et de contexture symétrique par rapport à ces sections normales, a démontré qu'un tel mode d'application est toujours possible (et conduit, dans le cas d'une simple flexion, aux lois connues, mais seulement approchées, de ce phénomène), quels que soient la force et le couple résultants, généralement donnés, de toutes les actions appliquées à chaque extrémité de la tige. Il a fait remarquer aussi que tout autre mode d'application, à chacune des extrémités, d'actions statiquement équivalentes à la même résultante et au même couple, produirait les mêmes déformations, si ce n'est très-près de l'extrémité considérée; car ces différents modes ne diffèrent les uns des autres que par l'application, aux divers points matériels qui la composent, de forces qui se font équilibre, et dont, par suite, il est presque évident que l'effet doit être insensible à une distance finie des mêmes points. M. de Saint-Venant a donc établi le premier, sur ses vraies bases, la théorie générale de l'équilibre des corps prismatiques dont la surface latérale n'est soumise qu'à la pression atmosphérique antérieure aux phénomènes étudiés; car il a fait connaître les vraies actions élastiques et les vraies déformations qui s'y trouvent en jeu à une distance finie des extrémités, c'est-à-dire aux points où ces phénomènes sont soumis à des lois indépendantes du mode particulier d'application des forces exercées aux extrémités mêmes.

Toutefois, il reste encore à démontrer, en s'appuyant seulement sur les équations générales de l'élasticité et sur la petitesse supposée des

dimensions transversales des tiges par rapport à leur longueur, que ce mode d'application est bien indifférent, c'est-à-dire que l'action mutuelle des fibres, à une distance finie des extrémités, est toujours dirigée à fort peu près suivant leurs tangentes, et que leur dilatation sur toute l'étendue de chaque section est une simple fonction linéaire des coordonnées transversales. Cette démonstration et l'établissement corrélatif des formules fondamentales de la déformation d'une tige constituent le premier objet du Mémoire actuel. Je les expose pour le cas général où des actions quelconques seraient appliquées, non-seulement près des extrémités, mais encore sur la masse entière de la tige, et où celle-ci serait hétérogène, mais de contexture symétrique par rapport à ses sections normales, et formée de fibres qui, isolées, subiraient les mêmes déformations latérales si on les soumettait à de simples tensions, produisant sur toutes la même dilatation longitudinale. Ainsi que M. de Saint-Venant l'a remarqué (même édition de Navier, § 7 des notes des nos 21 et 80), cette dernière condition est nécessaire pour que, dans les phénomènes d'extension et de flexion, les fibres ne se gênent pas mutuellement sur leurs surfaces contiguës et n'exercent pas les unes sur les autres cette action normale qu'on veut éviter.

M. Kirchoff a essayé de donner, d'un tout autre point de vue, une théorie complétement rationnelle des tiges élastiques très-minces (*Journal de Crelle*, t. LVI, p. 285, ou même édition de Navier, t. I, Appendice complémentaire, §§ 95 et 96). Il suppose qu'on mène, par chaque point matériel de l'axe de la tige et antérieurement aux déformations étudiées, un système d'axes rectangulaires des x', y', z', dirigés, celui des x' suivant l'axe de la tige et les deux autres suivant les deux axes d'inertie principaux de la section normale correspondante, puis que, pendant les déplacements, ce système se meuve, tout en conservant sa rectangularité, de manière que son origine coïncide toujours avec le même point matériel, et que son axe des x' et son plan des $x'y'$ ne cessent pas d'y être respectivement tangents à la même ligne et à la même surface matérielles. Un point de la tige très-voisin de l'un de ces systèmes peut lui être rapporté avant et après les déformations. Comme il y a une infinité de systèmes pareils, le point considéré sera déterminé, dans l'état primitif, au moyen de ses coordonnées x', y', z' par rapport à l'un d'eux, et de la distance s', mesurée

sur l'axe de la tige, de l'origine du système adopté à celle de la tige elle-même. Après les déformations, les déplacements relatifs u', v', w' du même point matériel, c'est-à-dire les accroissements reçus par les coordonnées primitives x', y', z', seront fonctions des quatre variables indépendantes x', y', z', s'. M. Kirchoff a démontré qu'il existe, entre leurs dérivées premières en x' et leurs dérivées pareilles en s', trois relations simples auxquelles j'arrive plus simplement en exprimant que la position dans l'espace d'un point de la tige est la même, quel que soit le système d'axes très-voisins auxquels on la rapporte. Dans ces relations, les trois dérivées de u', v', w' en s' doivent être généralement comparables à u', v', w', qui s'annulent pour $x' = y' = z' = 0$, et qui sont du même ordre de petitesse que les déformations produites multipliées par x', y', z'. M. Kirchoff les néglige; mais alors rien ne prouve qu'il ne faille pas négliger aussi, dans les mêmes formules, d'autres termes qui paraissent généralement comparables à u', v', w', et qui lui permettent d'expliquer les phénomènes de flexion et de torsion. Sa théorie est donc implicitement basée sur une hypothèse particulière, dont la vérité n'est pas évidente. Comme les dérivés de u', v', w' en s' caractérisent les différences qui existent entre les déformations subies au même instant par les tronçons successifs en lesquels on peut concevoir la tige divisée, cette hypothèse revient à admettre que les sections menées sur une longueur finie, avant les déplacements, normalement à l'axe de la tige, se trouvent, après les déplacements, déformées sensiblement de la même manière. Quand la tige est de la nature de celles que j'étudie dans ce Mémoire, c'est-à-dire de contexture symétrique par rapport à ses sections normales, cette hypothèse se trouve être en général, et en tant que seulement approximative, conforme à la réalité.

En résumé, la théorie de M. Kirchoff conduit, dans le cas de tiges dont la contexture est symétrique par rapport à leurs sections normales, aux vraies formules approchées de la flexion et de la torsion; mais elle me paraît reposer sur une hypothèse douteuse *à priori*, consistant à admettre que les sections normales, primitivement égales entre elles, sont encore, sur une longueur finie, égales après les déplacements. Elle a aussi l'inconvénient de laisser parmi les quantités qu'elle néglige comme trop petites, les actions tangentielles exercées, dans le

cas de la flexion inégale, à travers les divers éléments plans d'une de ces sections, forces qu'il est cependant intéressant d'étudier, puisque leur résultante est égale et contraire à celle des actions extérieures qui produisent la flexion.

Le Mémoire actuel contient, pour la détermination de ces forces tangentielles lorsqu'il s'agit de tiges fléchies ou tordues, homogènes sur toute l'étendue d'une section normale, une méthode nouvelle et simple qui permet de les obtenir sans calculer le déplacement longitudinal des divers points. Cette méthode a l'avantage de révéler une grande analogie entre les lois de la torsion et celles de l'écoulement permanent et bien régulier d'un liquide dans un tube rectiligne mouillé par ce liquide. Admettons, par exemple, que la tige tordue soit sans aucune cavité intérieure et de contexture isotrope autour de son axe, et concevons un tube qui aurait précisément la même section normale que cette tige et qui serait plein d'un liquide coulant, par filets rectilignes et parallèles, sous l'effort d'une pression constante : si l'on trace sur cette section, supposée appartenir successivement au tube et à la tige, les courbes, dites d'*égale vitesse*, tout le long desquelles la vitesse des filets fluides est constante, l'action tangentielle, dans la tige, exercée sur la section en chacun de leurs points, leur sera précisément tangente; de plus, si la pression qui produit l'écoulement est convenablement déterminée, la dérivée, dans le sens normal à ces courbes, de la vitesse des filets fluides, sera numériquement égale, en chaque point, à la force tangentielle exercée par unité de surface au même point de la section de la tige, et le double du volume liquide écoulé dans l'unité de temps aura de même la valeur numérique du moment total des forces qui produisent la torsion. Les intégrations que comportent ces deux questions peuvent être effectuées, non-seulement pour une infinité de formes, elliptique, triangulaire régulière, rectangulaire, etc., étudiées par M. de Saint-Venant dans son Mémoire sur la torsion (*Savants étrangers*, t. XIV, 1855), mais encore toutes les fois que la section est limitée par des courbes ou des portions de courbes appartenant à deux systèmes de lignes orthogonales et isothermes. Ce problème de calcul intégral n'est alors qu'un cas particulier de celui des températures stationnaires dans les cylindres isothermes, dont la belle solution, aussi simple que générale, a été donnée

par M. Lamé (11^e des *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Paris, 1859); M. Clebsch (*Theorie der elasticität fester cörper*, Leipzig, 1862, §§ 32 à 35) en a développé le calcul, au point de vue spécial de la torsion, pour une section comprise entre deux ellipses homofocales.

Après avoir brièvement appliqué les lois de l'extension, de la flexion et de la torsion à divers problèmes d'équilibre et de mouvement d'une tige rectiligne dont les déformations totales sont très-petites, j'étends ces lois au cas où des tensions, généralement variables d'une fibre à l'autre et pouvant être assez grandes pour avoir altéré la contexture primitive de la tige, seraient exercées sur celle-ci antérieurement aux déplacements étudiés. C'est le cas des cordes élastiques, c'est-à-dire des tiges assez fortement tendues pour que leur rigidité ait sur la flexion bien moins d'influence que la tension initiale. J'applique les formules obtenues à l'étude du mouvement transversal d'une corde pareillement constituée sur toute sa longueur, fixée à ses deux extrémités, et qui vibre dans un plan perpendiculaire à un des axes d'inertie principaux de ses sections normales. Les vibrations se font à fort peu près comme si la corde était parfaitement flexible, mais que sa tension fût augmentée d'une quantité égale au produit du nombre π par le carré de l'inverse de sa longueur et par le moment d'inertie d'une section autour de l'axe principal considéré, moment obtenu en supposant à chaque élément de la section une densité superficielle égale au coefficient d'élasticité de la fibre que coupe cet élément. Si fortement que soit tendue la corde, pourvu qu'elle ne se désagrége pas et que sa section varie assez peu, les coefficients d'élasticité de ses fibres seront constants d'après la loi expérimentale dite de *Gerstner;* par suite, la quantité qu'il faut ajouter à la tension vraie pour avoir la tension fictive est bien indépendante de cette tension, comme l'ont prouvé des expériences connues de Savart.

§ I. — *Rappel des équations générales de l'élasticité.*

Concevons un corps solide dont les molécules seraient soustraites à l'action de la pesanteur, et dont tout élément plan, pris dans son intérieur, ne serait soumis qu'à une pression normale et constante par

unité de surface, telle que la pression atmosphérique; puis supposons qu'on applique sur sa surface et à tous les points matériels qui le composent des forces capables d'imprimer à ces points de petits déplacements et de se faire équilibre au moyen des réactions intérieures que ces déplacements développent. Appelons : x, y, z les coordonnées primitives d'une molécule quelconque M du corps par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes; u, v, w, fonctions de x, y, z, les trois déplacements suivant les axes de la même molécule, c'est-à-dire les excès sur x, y, z de ses coordonnées après que le nouvel équilibre s'est établi; ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} six quantités, appelées respectivement *dilatations* et *glissements*, dont les expressions sont

$$(1)\quad \partial_x = \frac{du}{dx},\ \partial_y = \frac{dv}{dy},\ \partial_z = \frac{dw}{dz},\ g_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy},\ g_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz},\ g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx},$$

et qui caractérisent parfaitement les déformations éprouvées par la matière autour de la molécule M (les dilatations ∂ sont les accroissements reçus par l'unité de longueur des trois petites droites matérielles qui partent de M, et qui étaient, avant les déplacements, parallèles aux axes; les glissements g sont les cosinus des angles presque droits que forment deux à deux ces droites après les déplacements); N_1, T_3, T_2; T_3, N_2, T_1; T_2, T_1, N_3 les composantes, suivant les axes, de la force élastique exercée, dans le nouvel état d'équilibre, sur l'unité superficielle des éléments plans menés par la molécule M perpendiculairement à chacun des trois axes; ρ la densité primitive autour de la même molécule, et X, Y, Z les composantes suivant les axes de l'action extérieure rapportée à l'unité de masse; enfin p_x, p_y, p_z les composantes pareilles de la force, rapportée à l'unité superficielle, qui est exercée du dehors sur un point de la surface, et m, n, p les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface, menée en ce point et à l'extérieur. On sait :

1° Que N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 sont des fonctions linéaires de ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, sans termes constants, et dont les coefficients, fonctions données de x, y, z, dépendent de la nature élastique du corps; il en résulte que ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} sont à l'inverse six fonctions pareilles des N, T;

2° Que le nouvel équilibre est régi par les trois équations indéfinies

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dx} + \dfrac{dT_3}{dy} + \dfrac{dT_2}{dz} + \rho X = 0, \\ \dfrac{dT_3}{dx} + \dfrac{dN_2}{dy} + \dfrac{dT_1}{dz} + \rho Y = 0, \\ \dfrac{dT_2}{dx} + \dfrac{dT_1}{dy} + \dfrac{dN_3}{dz} + \rho Z = 0, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre les trois conditions, spéciales à la surface,

$$(3)\quad \begin{cases} p_x = mN_1 + nT_3 + pT_2, \\ p_y = mT_3 + nN_2 + pT_1, \\ p_z = mT_2 + nT_1 + pN_3. \end{cases}$$

Ces équations, dans lesquelles on devrait substituer aux N, T leurs expressions en fonction des ∂, g, ne peuvent suffire à déterminer ces six dernières quantités, du moins lorsqu'on ne les remplace pas par leurs valeurs (1). Il faut y joindre d'autres relations, exprimant à quelles conditions nécessaires, et généralement suffisantes, six fonctions données de x, y, z peuvent représenter trois dilatations ∂ et trois glissements g. Ces relations, données par M. de Saint-Venant [*], sont celles-ci :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\partial_x}{dy\,dz} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dg_{zx}}{dy} + \dfrac{dg_{xy}}{dz} - \dfrac{dg_{yz}}{dx}\right), \\ \dfrac{d^2\partial_y}{dz\,dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dg_{xy}}{dz} + \dfrac{dg_{yz}}{dx} - \dfrac{dg_{zx}}{dy}\right), \\ \dfrac{d^2\partial_z}{dx\,dy} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{dg_{yz}}{dx} + \dfrac{dg_{zx}}{dy} - \dfrac{dg_{xy}}{dz}\right), \\ \dfrac{d^2 g_{yz}}{dy\,dz} = \dfrac{d^2\partial_y}{dz^2} + \dfrac{d^2\partial_z}{dy^2}, \\ \dfrac{d^2 g_{zx}}{dz\,dx} = \dfrac{d^2\partial_z}{dx^2} + \dfrac{d^2\partial_x}{dz^2}, \\ \dfrac{d^2 g_{xy}}{dx\,dy} = \dfrac{d^2\partial_x}{dy^2} + \dfrac{d^2\partial_y}{dx^2}. \end{cases}$$

[*] *Mécanique appliquée* de Navier, annotée par M. de Saint-Venant, t. I, Appendice III, § 32.

On peut les établir comme il suit.

En désignant respectivement par x_0, y_0, z_0 une valeur particulière de x, y, z, et par f_1, f_2, f_3 trois fonctions arbitraires, on tire des trois premières formules (1)

$$(5)\quad \begin{cases} u = \int_{x_0}^{x} \partial_x\, dx + f_1(y, z), \\ v = \int_{y_0}^{y} \partial_y\, dy + f_2(z, x), \\ w = \int_{z_0}^{z} \partial_z\, dz + f_3(x, y). \end{cases}$$

Ces valeurs de u, v, w, portées dans les trois autres formules (1), les changent en

$$(5\ bis)\quad \begin{cases} \frac{df_2}{dz} + \frac{df_3}{dy} = g_{yz} - \int_{y_0}^{y} \frac{d\partial_y}{dz}\, dy - \int_{z_0}^{z} \frac{d\partial_z}{dy}\, dz, \\ \frac{df_3}{dx} + \frac{df_1}{dz} = g_{zx} - \int_{z_0}^{z} \frac{d\partial_z}{dx}\, dz - \int_{x_0}^{x} \frac{d\partial_x}{dz}\, dx, \\ \frac{df_1}{dy} + \frac{df_2}{dx} = g_{xy} - \int_{x_0}^{x} \frac{d\partial_x}{dy}\, dx - \int_{y_0}^{y} \frac{d\partial_y}{dx}\, dy; \end{cases}$$

celles-ci, respectivement différentiées en x, y, z, et résolues ensuite par rapport aux trois dérivées secondes qui entrent alors dans leurs premiers membres, donnent

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{d^2 f_1}{dy\, dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{zx}}{dy} + \frac{dg_{xy}}{dz} - \frac{dg_{yz}}{dx}\right) - \int_{x_0}^{x} \frac{d^2\partial_x}{dy\, dz}\, dx, \\ \frac{d^2 f_2}{dz\, dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{xy}}{dz} + \frac{dg_{yz}}{dx} - \frac{dg_{zx}}{dy}\right) - \int_{y_0}^{y} \frac{d^2\partial_y}{dz\, dx}\, dy, \\ \frac{d^2 f_3}{dx\, dy} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{yz}}{dx} + \frac{dg_{zx}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz}\right) - \int_{z_0}^{z} \frac{d^2\partial_z}{dx\, dy}\, dz. \end{cases}$$

En exprimant que les premiers membres, et par suite les seconds, de ces dernières sont respectivement indépendants de x, de y, de z, on obtient, pour conditions nécessaires, les trois premières (4). D'ailleurs, si celles-ci sont vérifiées, et si F_1, F_2, F_3, φ_1, φ_2, φ_3 désignent

six fonctions d'une seule variable, il est évident qu'on aura, en intégrant les relations (6) :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} f_1 &= F_1(y) + \varphi_1(z) + \int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \frac{d^2 f_1}{dy\,dz}\,dy\,dz,\\ f_2 &= F_2(z) + \varphi_2(x) + \int_{z_0}^{z}\int_{x_0}^{x} \frac{d^2 f_2}{dz\,dx}\,dz\,dx,\\ f_3 &= F_3(x) + \varphi_3(y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{d^2 f_3}{dx\,dy}\,dx\,dy, \end{aligned}\right.$$

où les intégrales doubles, dans lesquelles on pourra remplacer les dérivées secondes de f_1, f_2, f_3 par leurs valeurs (6), seront des fonctions parfaitement déterminées de y et de z, de z et de x, de x et de y.

Les relations (7), étant équivalentes à (6), le sont par suite aux relations (5 *bis*) différentiées respectivement en x, y, z, et, pour qu'elles le deviennent aux relations (5 *bis*) elles-mêmes, il faut et il suffit qu'elles vérifient ces relations (5 *bis*) respectivement pour $x = x_0$, pour $y = y_0$, pour $z = z_0$, c'est-à-dire qu'on ait

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{pour } x = x_0, \quad F'_2(z) + \varphi'_3(y) = g_{yz} - \int_{y_0}^{y} \frac{d\delta_y}{dz}\,dy - \int_{z_0}^{z} \frac{d\delta_z}{dy}\,dz,\\ &\text{pour } y = y_0, \quad F'_3(x) + \varphi'_1(z) = g_{zx} - \int_{z_0}^{z} \frac{d\delta_z}{dx}\,dz - \int_{x_0}^{x} \frac{d\delta_x}{dz}\,dx,\\ &\text{pour } z = z_0, \quad F'_1(y) + \varphi'_2(x) = g_{xy} - \int_{x_0}^{x} \frac{d\delta_x}{dy}\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{d\delta_y}{dx}\,dy. \end{aligned}\right.$$

Chacune de ces dernières est elle-même possible à la condition nécessaire et suffisante que la dérivée seconde de son second membre, en y et z pour la première, en z et x pour la seconde, en x et y pour la troisième, soit nulle comme l'est la dérivée pareille du premier membre. Il vient ainsi les trois dernières conditions (4), qui sont vraies, non-seulement pour $x = x_0$, ou pour $y = y_0$, ou pour $z = z_0$, mais encore et par suite pour des valeurs quelconques de x, y, z, ainsi qu'on le reconnaît d'ailleurs directement en différentiant (5 *bis*) au lieu des relations plus particulières (8). Celles-ci donneront les six dérivées F′, φ′ avec trois constantes arbitraires qui paraîtront, une

fois avec le signe $+$ et une fois avec le signe $-$, la première dans F'_2 et φ'_3, la seconde dans F'_3 et φ'_1, la troisième dans F'_1 et φ'_2. On intégrera une fois pour obtenir les fonctions F, φ, et les expressions de f_1, f_2, f_3 contiendront en tout six constantes arbitraires que l'on pourra faire nulles, car elles correspondront à un petit mouvement d'ensemble quelconque du corps, mouvement dont il est permis de faire abstraction.

§ II. — *Formules des forces élastiques pour diverses espèces de milieux.*

Je me bornerai ci-après à l'étude de milieux symétriques par rapport à un des plans coordonnés, à celui des yz par exemple, c'est-à-dire tels que, lorsqu'on change le sens de l'axe des x, l'expression des forces élastiques y soit la même qu'avec le premier système d'axes. Comme ce changement d'axes revient à transformer simplement T_2, T_3 en $-T_2$, $-T_3$, x en $-x$, u en $-u$, g_{zx} en $-g_{zx}$, g_{xy} en $-g_{xy}$, sans rien changer à N_1, N_2, N_3, T_1, y, z, v, w, ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, les expressions de N_1, N_2, N_3, T_1 ne pourront contenir que les quatre termes affectés des ∂ et de g_{yz}, et T_2, T_3 auront seulement les deux termes affectés de g_{zx}, g_{xy}. En tirant à l'inverse les ∂, g en fonction des N, T, les trois ∂ et g_{yz} dépendront des N et de T_1, tandis que g_{zx}, g_{xy} dépendront de T_2, T_3. On aura des formules de la forme

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \partial_x &= AN_1 - BN_2 - B'N_3 + CT_1,\\ \partial_y &= -\eta AN_1 + \text{des termes en } N_2,\ N_3,\ T_1,\\ \partial_z &= -\eta' AN_1 + \text{des termes en } N_2,\ N_3,\ T_1,\\ g_{yz} &= \eta'' AN_1 + \text{des termes en } N_2,\ N_3,\ T_1,\\ g_{zx} &= GT_2 + HT_3,\\ g_{xy} &= G'T_3 + H'T_2. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients A, B, B', η, η', G, G' sont positifs. Cela provient de ce que, chez tous les solides naturels : 1° la dilatation ∂_x croît et les autres ∂_y, ∂_z décroissent lorsque la traction normale N_1, qui est exercée dans le sens des x, grandit ; 2° ∂_x diminue, au contraire, quand les

autres tractions N_2, N_3 augmentent; 3° le cosinus g_{zx} de l'angle que forment deux petites lignes matérielles menées dans l'état primitif du milieu, et en partant de la molécule M, parallèlement aux z positifs et aux x positifs, augmente évidemment lorsque grandit la force T_2 exercée dans le sens de l'une de ces lignes sur un élément plan perpendiculaire à l'autre, et de même g_{xy} doit croître avec T_3.

Il existe toujours une position des axes rectangulaires des y et des z pour laquelle on a $C=0$, et une position des mêmes axes pour laquelle $H+H'=0$; de plus, les expressions C^2-4BB', $(H+H')^2-4CC'$ ont les mêmes valeurs pour toutes les positions de ces axes, et sont négatives [*].

[*] Pour démontrer ces diverses propositions, rappelons d'abord quelques formules générales de la théorie de l'élasticité. Supposons que l'on prenne, au lieu des axes rectangulaires des x, y, z, de nouveaux axes rectangulaires des x', y', z' ayant même origine, mais faisant avec les premiers des angles dont les cosinus seront respectivement nommés: m, n, p pour celui des x'; m', n', p' pour celui des y'; m'', n'', p'' pour celui des z'. Appelons : x', y', z' et u', v', w' les coordonnées primitives et les déplacements, par rapport à ce système d'axes, de la molécule dont x, y, z et u, v, w étaient les coordonnées primitives et les déplacements dans le premier système; N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 les composantes, suivant les nouveaux axes, des forces exercées sur l'unité superficielle des éléments plans perpendiculaires à ces axes; $\partial_{x'}$, $\partial_{y'}$, $\partial_{z'}$, $g_{y'z'}$, $g_{z'x'}$, $g_{x'y'}$ les dilatations ∂ et les glissements g dans le nouveau système, c'est-à-dire les expressions

$$\frac{du'}{dx'},\quad \frac{dv'}{dy'},\quad \frac{dw'}{dz'},\quad \frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'},\quad \frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'},\quad \frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}.$$

Les formules ordinaires de la transformation des coordonnées donneront

$$(a)\left\{\begin{array}{lll} x=mx'+m'y'+m''z', & y=nx'+n'y'+n''z', & z=px'+p'y'+p''z'; \\ x'=mx+ny+pz, & y'=m'x+n'y+p'z, & z'=m''x+n''y+p''z; \\ u'=mu+nv+pw, & v'=m'u+n'v+p'w, & w'=m''u+n''v+p''w; \\ & \dfrac{d}{dx'}=m\dfrac{d}{dx}+n\dfrac{d}{dy}+p\dfrac{d}{dz}, & \\ & \dfrac{d}{dy'}=m'\dfrac{d}{dx}+n'\dfrac{d}{dy}+p'\dfrac{d}{dz}, & \\ & \dfrac{d}{dz'}=m''\dfrac{d}{dx}+n''\dfrac{d}{dy}+p''\dfrac{d}{dz}; & \end{array}\right.$$

Si, outre le plan des yz, il y a un second plan de symétrie de contexture, celui des zx par exemple, les expressions des N ne pourront plus contenir g_{yz}, ni celle de T_1 les ∂, ni celle de T_2, g_{xy}, ni enfin

---

et, par suite,

$$
(b)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\partial_{x'} \text{ ou } \frac{du'}{dx'} = m^2\partial_x + n^2\partial_y + p^2\partial_z + np\,g_{yz} + pm\,g_{zx} + mn\,g_{xy},\\
&g_{y'z'} \text{ ou } \frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'} = 2(m'm''\partial_x + n'n''\partial_y + p'p''\partial_z)\\
&\qquad + (n'p'' + p'n'')g_{yz} + (p'm'' + m'p'')g_{zx} + (m'n'' + n'm'')g_{xy},\\
&\partial_{y'}, \partial_{z'}, g_{z'x'}, g_{x'y'} = \text{des expressions pareilles, mais avec d'autres accents sur } m, n, p.
\end{aligned}
\right.
$$

On peut exprimer les N, T en fonction des N′, T′. Il suffit d'observer que les formules (3), qui sont applicables à tous les éléments plans construits dans un corps, et non pas seulement à ceux de sa surface, permettent d'obtenir les composantes, suivant trois axes rectangulaires, ceux des x', y', z' par exemple, de la force élastique exercée sur l'unité de surface de l'élément plan déterminé par les cosinus des angles de sa normale avec ces axes, en fonction des forces N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 exercées sur les éléments perpendiculaires aux mêmes axes des x', y', z'. Pour l'élément perpendiculaire aux x, dont la direction est déterminée par les cosinus m, m', m'', ces trois composantes sont :

$$mN'_1 + m'T'_3 + m''T'_2,\quad mT'_3 + m'N'_2 + m''T'_1,\quad mT'_2 + m'T'_1 + m''N'_3.$$

Celles-ci, multipliées respectivement par m, m', m'' et ajoutées, donneront N_1, composante suivant les x de la force exercée sur l'élément plan qui leur est perpendiculaire; multipliées par n, n', n'' et ajoutées, elles donneront T_3, composante suivant les y de la même force; multipliées de même par p, p', p'' et ajoutées, elles donneront T_2. On trouve ainsi

$$
(c)\quad \left\{
\begin{aligned}
&N_1 = m^2N'_1 + m'^2N'_2 + m''^2N'_3 + 2(m'm''T'_1 + m''mT'_2 + mm'T'_3),\\
&T_2 = pmN'_1 + p'm'N'_2 + p''m''N'_3 + (p'm'' + m'p'')T'_1 + (p''m + m''p)T'_2 + (pm' + mp')T'_3,\\
&T_3 = mnN'_1 + m'n'N'_2 + m''n''N'_3 + (m'n'' + n'm'')T'_1 + (m''n + n''m)T'_2 + (mn' + nm')T'_3.\\
&\text{On obtiendrait des valeurs pareilles pour } N_2, N_3, T_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Les expressions de $\partial_{x'}$, $\partial_{y'}$,..., $g_{x'y'}$, en fonction de N'_1, N'_2,..., T'_3, s'obtiendront en substituant, dans les formules (b), à ∂_x, ∂_y,..., g_{xy}, leurs valeurs, (9) par exemple, en N_1, N_2,..., T_3, puis à ces N, T leurs expressions (c).

Supposons actuellement que le changement d'axes se borne à faire tourner dans leur plan, et d'un angle α, l'ensemble des deux axes des y et des z. On aura

$$
\begin{aligned}
m &= 1, & n &= 0, & p &= 0;\\
m' &= 0, & n' &= \cos\alpha, & p' &= \sin\alpha;\\
m'' &= 0, & n'' &= -\sin\alpha, & p'' &= \cos\alpha;
\end{aligned}
$$

celle de T_3, g_{zx}. Donc les N seront simplement fonctions des ∂; T_1, T_2, T_3 ne dépendront respectivement que de g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, et le plan des xy sera un troisième plan de symétrie de contexture. Les coefficients C, H, H′ des formules précédentes seront nuls.

Le milieu sera *isotrope* autour de l'axe des x, et celui-ci prendra

---

et les formules (b), (c) deviendront

$$(b)\quad \begin{cases} \partial_{x'} = \partial_x, \\ \partial_{y'} = \partial_y \cos^2\alpha + \partial_z \sin^2\alpha + \frac{1}{2} g_{yz} \sin 2\alpha, \\ \partial_{z'} = \partial_z \cos^2\alpha + \partial_y \sin^2\alpha - \frac{1}{2} g_{yz} \sin 2\alpha, \\ g_{y'z'} = -(\partial_y - \partial_z)\sin 2\alpha + g_{yz}\cos 2\alpha, \\ g_{z'x'} = g_{zx}\cos\alpha - g_{xy}\sin\alpha, \\ g_{x'y'} = g_{xy}\cos\alpha + g_{zx}\sin\alpha; \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} N_1 = N'_1, \\ N_2 = N'_2\cos^2\alpha + N'_3\sin^2\alpha - T'_1\sin 2\alpha, \\ N_3 = N'_3\cos^2\alpha + N'_2\sin^2\alpha + T'_1\sin 2\alpha, \\ T_1 = \frac{1}{2}(N'_2 - N'_3)\sin 2\alpha + T'_1\cos 2\alpha, \\ T_2 = T'_2\cos\alpha + T'_3\sin\alpha, \\ T_3 = T'_3\cos\alpha - T'_2\sin\alpha. \end{cases}$$

Dans le cas des formules (9), pour lequel les ∂ et g_{yz} sont indépendants de T_2, T_3 et g_{zx}, g_{xy} indépendants des N et de T_1, on peut observer que $\partial_{x'}$, $\partial_{y'}$, $\partial_{z'}$, $g_{y'z'}$ ne dépendront encore que de N_1, N_2, N_3, T_1, et par suite de N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, et que $g_{z'x'}$, $g_{x'y'}$ dependront seulement de T_2, T_3 et par suite de T'_2, T'_3.

Le coefficient, analogue à C, dont T'_1 sera affecté dans l'expression de $\partial_{x'}$, est simplement

$$(d)\qquad (B - B')\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha.$$

Pour que ce coefficient soit nul, il suffit de faire $\tang 2\alpha = \frac{-C}{B - B'}$: ce qui prouve bien qu'il existe une position des axes des y et des z pour laquelle $C = 0$.

Le coefficient, analogue à H, dont T'_3 sera affecté dans l'expression de $g_{z'x'}$ est

$$\cos\alpha(G\sin\alpha + H\cos\alpha) - \sin\alpha(G'\cos\alpha + H'\sin\alpha),$$

et le coefficient, analogue à H′, qui affecte T'_2 dans l'expression de $g_{x'y'}$ est de même

$$\cos\alpha(-G'\sin\alpha + H'\cos\alpha) + \sin\alpha(G\cos\alpha - H\sin\alpha);$$

le nom d'*axe d'élasticité* [*], si l'on peut, sans changer les formules des N, T, non-seulement échanger entre eux les deux axes des y et des z (ce qui entraîne l'égalité du coefficient de ∂_y à celui de ∂_z dans N_1, et de ceux de ∂_x, ∂_y, ∂_z dans N_2 et g_{zx} dans T_2 respectivement à ceux de ∂_x, ∂_z, ∂_y dans N_3 et g_{xy} dans T_3), mais encore faire tourner d'un

---

la somme de ces deux coefficients,

$$(e)\qquad (G - G')\sin 2\alpha + (H + H')\cos 2\alpha,$$

s'annule pour $\tang 2\alpha = -\frac{H + H'}{G - G'}$. Donc il existe un système d'axes des y et des z pour lequel la somme $H + H'$ est nulle.

Les coefficients, analogues à B et B', dont N'_2 et N'_3 sont affectés dans l'expression de $\partial_{x'}$, sont respectivement

$$B\cos^2\alpha + B'\sin^2\alpha - \tfrac{1}{2}C\sin 2\alpha,\quad B\sin^2\alpha + B'\cos^2\alpha + \tfrac{1}{2}C\sin 2\alpha;$$

si l'on retranche quatre fois leur produit du carré du coefficient (d), analogue à C, et qu'on réduise après avoir effectué les calculs, il vient

$$\begin{aligned}&[(B - B')\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha]^2\\ &\quad - 4(B\cos^2\alpha + B'\sin^2\alpha - \tfrac{1}{2}C\sin 2\alpha)(B\sin^2\alpha + B'\cos^2\alpha + \tfrac{1}{2}C\sin 2\alpha) = C^2 - 4BB'.\end{aligned}$$

Donc la somme $C^2 - 4BB'$ est la même pour tous les systèmes rectangulaires des axes des y et des z, et, comme elle est évidemment négative pour celui qui donne $C = 0$, elle l'est toujours.

De même, les coefficients, analogues à G et G', dont sont affectés respectivement T'_2 dans l'expression $g_{z'x'}$ et T'_3 dans celle de $g_{x'y'}$, sont

$$G\cos^2\alpha + G'\sin^2\alpha - \tfrac{1}{2}(H + H')\sin 2\alpha,\quad G\sin^2\alpha + G'\cos^2\alpha + \tfrac{1}{2}(H + H')\sin 2\alpha.$$

En retranchant quatre fois leur produit du carré de l'expression (e), analogue à $H + H'$, il vient, après quelques réductions, $(H + H')^2 - 4GG'$: donc cette expression a bien la même valeur, quel que soit le système d'axes des y et des z, et, comme elle est négative pour celui qui donne $H + H' = 0$, elle l'est dans tous les cas.

[*] Au § VIII d'un Mémoire *sur les ondes dans les milieux isotropes déformés* (*Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1870), j'ai appelé, comme dans les Traités de double réfraction, *axes d'élasticité* les intersections de trois plans rectangulaires de symétrie de contexture. Il conviendrait peut-être de ne donner ce nom, comme je le fais dans le Mémoire actuel, qu'aux droites tout autour desquelles les élasticités sont pareillement distribuées; mais on pourrait aussi appeler ces dernières *axes d'isotropie*.

angle quelconque, autour de l'axe des x, le système des deux autres axes; ce qui oblige, comme on le démontre le plus simplement en supposant cette rotation infiniment petite, à faire le coefficient de ∂_y, dans l'expression de N_2, égal à celui de ∂_z dans la même expression, plus le double du coefficient de g_{yz} dans celle de T_1. Il en résulte que, si λ, μ, λ', μ', μ'', ν sont six coefficients d'élasticité, et si θ désigne la dilatation cubique, égale à $\partial_x + \partial_y + \partial_z$, les formules des N, T seront

$$(10)\qquad \begin{cases} N_1 = \lambda'\theta + 2\mu'\partial_x, & T_1 = \mu g_{yz}, \\ N_2 = \lambda\theta + \nu\partial_x + 2\mu\partial_y, & T_2 = \mu'' g_{zx}, \\ N_3 = \lambda\theta + \nu\partial_x + 2\mu\partial_z, & T_3 = \mu'' g_{xy}. \end{cases}$$

En ajoutant les trois de ces relations où entrent les N, puis ramenant le second membre du résultat à ne contenir que ∂_x et θ, et éliminant enfin ∂_x au moyen de la première (10), il vient

$$(11)\qquad \theta = \frac{(\mu - \nu) N_1 + \mu' (N_2 + N_3)}{2(\lambda + \mu)\mu' + (\mu - \nu)\lambda'},$$

et ensuite

$$(10\,bis)\qquad \begin{cases} \partial_x = \dfrac{2(\lambda + \mu) N_1 - \lambda' (N_2 + N_3)}{2[2(\lambda + \mu)\mu' + (\mu - \nu)\lambda']}, \\ \partial_y = \dfrac{-2\mu(\lambda + \nu) N_1 + [2(\lambda + 2\mu)\mu' + (2\mu - \nu)\lambda'] N_2 - (2\lambda\mu' - \nu\lambda') N_3}{4\mu[2(\lambda + \mu)\mu' + (\mu - \nu)\lambda']}, \\ \partial_z = \dfrac{-2\mu(\lambda + \nu) N_1 + [2(\lambda + 2\mu)\mu' + (2\mu - \nu)\lambda'] N_3 - (2\lambda\mu' - \nu\lambda') N_2}{4\mu[2(\lambda + \mu)\mu' + (\mu - \nu)\lambda']}, \\ g_{yz} = \dfrac{T_1}{\mu}, \quad g_{zx} = \dfrac{T_2}{\mu''}, \quad g_{xy} = \dfrac{T_3}{\mu''}. \end{cases}$$

S'il y a enfin un second axe d'élasticité, celui des y par exemple, N_1 et N_3, T_1 et T_3 devront se changer l'un en l'autre si l'on permute entre eux les deux axes des x et des z : on devra donc avoir $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, $\nu = 0$, $\mu'' = \mu$. L'axe des z sera un troisième axe d'élasticité, les formules des forces élastiques ne changeront pas lorsqu'on passera d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre quelconque, et le milieu sera dit *isotrope* ou *d'élasticité constante dans toutes les directions*.

Mais passons au cas général d'une contexture quelconque, et cher-

chons à exprimer analytiquement qu'il faut toujours dépenser un certain travail pour écarter un corps de son état naturel, fait d'expérience universellement admis. Considérons un simple élément de volume ayant ses arêtes primitivement parallèles aux axes et respectivement désignées par dx, dy, dz, et supposons cet élément soumis, sur ses faces opposées, à des forces sans cesse égales et contraires, uniformément distribuées sur chacune et lentement croissantes à partir du moment où elles sont nulles, de manière à se faire toujours équilibre si le corps était rigide, et à ne produire effectivement que des vitesses insensibles. Si nous supposons que les déplacements u, v, w varient ensemble pour toutes les molécules, proportionnellement à une même fonction du temps, de manière à conserver toujours entre eux les mêmes rapports, les déformations $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{g}$, fonctions linéaires des dérivées premières en x, y, z de u, v, w, et, par suite, les N, T, fonctions linéaires des $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{g}$, varieront aussi comme la même fonction du temps. Cela posé, appelons x, y, z les coordonnées primitives, et u, v, w les déplacements de la molécule située au sommet de l'élément de volume considéré qui a les coordonnées les plus petites. La face $dy\,dz$, qui passe par ce sommet, est soumise, suivant les axes des x, des y et des z, aux forces $-N_1\,dy\,dz$, $-T_3\,dy\,dz$, $-T_2\,dy\,dz$, que l'on peut supposer appliquées au centre de cette face, centre dont les déplacements ne diffèrent pas sensiblement de u, v, w. Le travail élémentaire de ces forces, obtenu en les multipliant par les projections du, dv, dw sur les axes des x, y, z du déplacement de leur point d'application, a pour expression

$$-N_1\,dy\,dz\,du,\qquad -T_3\,dy\,dz\,dv,\qquad -T_2\,dy\,dz\,dw,$$

ou bien

$$-\frac{N_1}{u}\,dy\,dz\,u\,du,\qquad -\frac{T_3}{v}\,dy\,dz\,v\,dv,\qquad -\frac{T_2}{w}\,dy\,dz\,w\,dw;$$

si l'on intègre à partir de l'époque où l'on avait $u=0$, $v=0$, $w=0$, et si l'on observe que les rapports $\frac{N_1}{u}$, $\frac{T_3}{v}$, $\frac{T_2}{w}$ sont indépendants du temps, il vient, pour le travail total des forces exercées sur la première

face $dy\,dz$ de l'élément de volume,

$$-\tfrac{1}{2}dy\,dz\left[\frac{N_1}{u}u^2+\frac{T_3}{v}v^2+\frac{T_2}{w}w^2\right]\quad \text{ou}\quad -\tfrac{1}{2}dy\,dz\left[N_1u+T_3v+T_2w\right]$$

Le travail des forces exercées sur la seconde face $dy\,dz$ aura évidemment la même expression, mais changée de signe et augmentée de sa différentielle par rapport à x. Comme N_1, T_3, T_2 ont les mêmes valeurs sur les deux faces $dy\,dz$, cette différentielle est

$$\tfrac{1}{2}dx\,dy\,dz\left[N_1\frac{du}{dx}+T_3\frac{dv}{dx}+T_2\frac{dw}{dx}\right].$$

En opérant ainsi pour les autres faces, et faisant la somme totale des travaux dépensés pour écarter l'élément de son état naturel, il vient

$$(12)\qquad \tfrac{1}{2}dx\,dy\,dz\left[N_1\partial_x+N_2\partial_y+N_3\partial_z+T_1g_{yz}+T_2g_{zx}+T_3g_{xy}\right].$$

Comme cette expression doit être essentiellement positive, la relation cherchée est

$$(12\ bis)\qquad N_1\partial_x+N_2\partial_y+N_3\partial_z+T_1g_{yz}+T_2g_{zx}+T_3g_{xy}>0.$$

Si l'on substitue, dans le premier membre de cette inégalité, aux ∂, g leurs expressions linéaires en fonction des N, T, ce premier membre sera une fonction 2Φ des N, T, homogène et du second degré, qui pourra être mise sous la forme

$$(12\ ter)\quad \left\{\begin{aligned}2\Phi = {}& a(N_1+\alpha N_2+\alpha' N_3+\alpha'' T_1+\alpha''' T_2+\alpha^{\text{iv}} T_3)^2\\ &+b(N_2+\beta N_3+\beta' T_1+\beta'' T_2+\beta''' T_3)^2\\ &+c(N_3+\gamma T_1+\gamma' T_2+\gamma'' T_3)^2\\ &+d(T_1+\delta T_2+\delta' T_3)^2\\ &+e(T_2+\varepsilon T_3)^2\\ &+f\,T_3^2,\end{aligned}\right.$$

avec des coefficients a, b, c, d, e, f plus grands que zéro. En effet, la

partie de Φ qui contient N_1 est de la forme

$$a(N_1^2 + 2\alpha N_1 N_2 + 2\alpha' N_1 N_3 + 2\alpha'' N_1 T_1 + 2\alpha''' N_1 T_2 + 2\alpha^{\text{IV}} N_1 T_3),$$

où a est positif (puisque Φ, essentiellement positif lui-même, se réduit à aN_1^2 lorsque N_1 est la seule des quantités N, T qui ne soit pas nulle), et où α, α', α'', α''', α^{IV} sont quelconques. En ajoutant à ces termes tout ce qu'il faut pour compléter le carré

$$a(N_1 + \alpha N_2 + \alpha' N_3 + \alpha'' T_1 + \alpha''' T_2 + \alpha^{\text{IV}} T_3)^2,$$

et retranchant ce qui est ainsi ajouté du reste de la fonction Φ, cette fonction se composera du carré précédent, plus d'une expression homogène du second degré, qui n'aura plus que les cinq variables N_2, N_3, T_1, T_2, T_3. Si l'on convient de faire N_1 égal à

$$-\alpha N_2 - \alpha' N_3 - \alpha'' T_1 - \alpha''' T_2 - \alpha^{\text{IV}} T_3,$$

Φ se réduira même à cette expression, de laquelle, en raisonnant exactement comme sur l'expression complète, on tirera successivement les carrés qui ont b, c, d, e, f pour coefficients.

On pourrait, dans le premier membre de (12 *bis*), remplacer les N, T par leurs valeurs en fonction des ∂, g. Alors la fonction Φ, homogène et du second degré, par rapport aux ∂, g, pourrait être mise sous une forme analogue à (12 *ter*), mais qui contiendrait les ∂, g au lieu des N, T.

Il est un cas très-important, et peut-être même applicable à tous les corps de la nature, pour lequel l'expression (12) représente le travail employé à écarter un élément de volume de son état naturel, sans que les N, T varient proportionnellement pendant toute la durée du phénomène. C'est lorsque la partie de ce travail, qui est effectuée pendant un temps très-court

$$dx\,dy\,dz(N_1 d\partial_x + N_2 d\partial_y + N_3 d\partial_z + T_1 dg_{yz} + T_2 dg_{zx} + T_3 dg_{xy}),$$

est une différentielle exacte, ou que, Φ étant supposé exprimé en fonction des ∂, g, on a

$$(13)\quad N_1 = \frac{d\Phi}{d\partial_x},\quad N_2 = \frac{d\Phi}{d\partial_y},\quad N_3 = \frac{d\Phi}{d\partial_z},\quad T_1 = \frac{d\Phi}{dg_{yz}},\quad T_2 = \frac{d\Phi}{dg_{zx}},\quad T_3 = \frac{d\Phi}{dg_{xy}}.$$

Dans le même cas, si l'on suppose Φ exprimé en fonction des N, T, les expressions des ∂, g seront

$$(13\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\partial_x = \frac{d\Phi}{dN_1}, \quad \partial_y = \frac{d\Phi}{dN_2}, \quad \partial_z = \frac{d\Phi}{dN_3},\\ &g_{yz} = \frac{d\Phi}{dT_1}, \quad g_{zx} = \frac{d\Phi}{dT_2}, \quad g_{xy} = \frac{d\Phi}{dT_3}. \end{aligned}\right.$$

En effet, en différentiant par rapport à ∂_x le potentiel Φ, il viendra

$$N_1 \text{ ou } \frac{d\Phi}{d\partial_x} = \frac{d\Phi}{dN_1}\frac{dN_1}{d\partial_x} + \frac{d\Phi}{dN_2}\frac{dN_2}{d\partial_x} + \frac{d\Phi}{dN_3}\frac{dN_3}{d\partial_x} + \frac{d\Phi}{dT_1}\frac{dT_1}{d\partial_x} + \frac{d\Phi}{dT_2}\frac{dT_2}{d\partial_x} + \frac{d\Phi}{dT_3}\frac{dT_3}{d\partial_x}.$$

Le second membre de cette relation ne diffère de l'expression linéaire de N_1 en fonction des ∂, g qu'en ce que $\frac{d\Phi}{dN_1}, \frac{d\Phi}{dN_2}, \ldots, \frac{d\Phi}{dT_3}$ y remplacent $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$. Comme on aurait des expressions pareilles de N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 en différentiant Φ par rapport à ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, il faut bien que $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$ soient précisément égaux à $\frac{d\Phi}{dN_1}, \frac{d\Phi}{dN_2}, \ldots, \frac{d\Phi}{dT_3}$.

§ III. — *Étude d'une tige de très-petite section. Considérations préliminaires.*

Supposons que le milieu élastique considéré soit un corps sensiblement cylindrique sur une étendue comparable aux dimensions de ses sections transversales, mais d'une longueur totale beaucoup plus grande que ces dimensions mêmes. Après des déplacements aussi considérables qu'on voudra, mais tels que les ∂, g soient partout très-petits, une portion de ce corps, comprise entre deux sections normales assez voisines, n'aura subi que de petits déplacements u, v, w par rapport à un système d'axes pris dans son intérieur et assujettis aux mêmes mouvements d'ensemble que cette partie du corps. Si donc, à un moment donné quelconque, on décompose, suivant ce système d'axes supposés fixes durant un instant très-court, toutes les forces, y compris celles d'inertie lorsque le corps est en mouvement, qui agissent sur la portion considérée, les formules précédentes leur seront applicables. Nous supposerons le plan des yz parallèle aux sections.

Le corps pourra être plein ou tubulaire, et, dans ce dernier cas, avoir un nombre quelconque de cavités intérieures; mais nous admettrons que sa surface latérale, sensiblement cylindrique et composée généralement d'une nappe extérieure et d'une ou de plusieurs nappes intérieures, ne soit soumise à aucune action autre que la pression atmosphérique antérieure aux déplacements. Soient : σ une section normale, et $d\sigma$ ou $dydz$ un de ses éléments; s le contour de cette section, formé d'une partie extérieure et de parties intérieures; ds un élément de ce contour, dont nous supposerons la partie extérieure décrite en tournant dans le sens des y positifs vers les z positifs et les parties intérieures décrites en sens contraire; dy, dz les projections de cet élément sur les axes des y et des z, et m, n, p les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface latérale, menée en un point du même élément et hors de la section σ. Ces cosinus sont $m=0$, $n=\pm\frac{dz}{ds}$, $p=\mp\frac{dy}{ds}$; mais, d'après la manière dont le contour est décrit, la normale menée hors de la section σ fait un angle aigu ou un angle obtus avec l'axe des y, suivant qu'on a $dz>0$ ou $dz<0$; donc il faut prendre les signes supérieurs, et poser

$$(13\ ter)\quad m=0,\quad n=\frac{dz}{ds},\quad p=-\frac{dy}{ds},\quad \text{ou}\quad dz=n\,ds,\quad dy=-p\,ds.$$

Les équations (3) se réduiront ainsi à

$$(14)\left\{\begin{array}{l} T_3n+T_2p=0,\quad N_2n+T_1p=0,\quad T_1n+N_3p=0, \\ \text{ou bien} \\ T_3dz-T_2dy=0,\quad N_2dz-T_1dy=0,\quad T_1dz-N_3dy=0 \\ \text{(sur le contour } s\text{)}. \end{array}\right.$$

La constitution de la matière dont la tige est formée sera supposée généralement variable d'un point à l'autre, assez lentement le long d'une parallèle quelconque à l'axe des x, mais aussi rapidement qu'on voudra d'un point à l'autre d'une section normale, et même brusquement sur certaines lignes données de chaque section, lignes que nous appellerons s_1. En désignant par n_1, p_1 les cosinus des angles que la normale à l'une de ces lignes, menée dans un sens déterminé, fait avec

les axes des y et des z, l'égalité des composantes suivant les x, les y et les z des forces exercées de part et d'autre de l'élément plan perpendiculaire à cette normale obligera de supposer aux trois expressions $n_1 T_3 + p_1 T_2$, $n_1 N_2 + p_1 T_1$, $n_1 T_1 + p_1 N_3$ les mêmes valeurs quand N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 sont pris d'un côté de l'élément plan, que lorsqu'ils sont pris de l'autre côté. Il est clair de même, puisque la matière n'est supposée nulle part se disjoindre, que les déplacements u, v, w seront égaux des deux côtés du même élément plan. Telles sont les conditions, au nombre de six, spéciales aux surfaces de séparation de deux parties de tige adjacentes, mais de différente constitution.

Ces conditions, jointes à (14), permettent de déduire des équations (2) une formule très-importante qui nous servira souvent. Appelons U, V, W trois fonctions de x, y, z, continues dans tout l'intérieur d'une section σ, mais d'ailleurs quelconques, et supposons que leurs dérivées premières en y et z soient également continues, excepté sur les lignes de chaque section où la constitution de la matièrie varie beaucoup, lignes des deux côtés desquelles ces dérivées pourront prendre des valeurs différentes. Ajoutons les équations (2) membre à membre, après les avoir respectivement multipliées par $U d\sigma$, $V d\sigma$, $W d\sigma$, et intégrons le résultat dans tout l'intérieur de la section σ. Nous pourrons diviser la section σ en régions dans chacune desquelles la constitution de la matière ne varie qu'avec continuité d'un point aux points voisins; chacune de ces régions sera limitée par un contour appartenant aux lignes s et s_1, formé d'une partie extérieure et peut-être aussi de courbes fermées intérieures; nous supposerons ces lignes décrites dans le même sens que le contour s, c'est-à-dire de telle sorte que, si l'on appelle ds un de leurs éléments, pris positivement, dy et dz les projections de cet élément sur les axes des y et des z, n et p les cosinus des angles que fait avec ces axes la normale menée hors de la région, on ait $dz = n ds$, $dy = -p ds$. En intégrant d'abord dans cette région seulement, on pourra transformer plusieurs termes au moyen de l'intégration par parties. Par exemple, l'expression $U \frac{dT_3}{dy} d\sigma$ pourra être remplacée identiquement par $\frac{dUT_3}{dy} dy\, dz - T_3 \frac{dU}{dy} d\sigma$; on intégrera le premier terme, pour une même valeur de z et de dz, sur toute

l'étendue des parties, comprises dans la région, en lesquelles une parallèle à l'axe des y est divisée par les lignes s et s_1 : en caractérisant par les indices 0, 1 les valeurs des fonctions aux deux extrémités d'une de ces parties, le terme intégré sera remplacé, pour chacune d'elles, par la différence $(UT_3)_1 dz - (UT_3)_0 dz$; or, dans le premier terme de cette différence, dz est la projection $(nds)_1$, sur l'axe des z, d'un élément ds du contour de la région; dans le second terme, dz est la valeur absolue de la projection négative $(nds)_0$ d'un autre élément du même contour; cette différence peut donc être remplacée par $(UT_3 ds)_1 + (UT_3 ds)_0$. En opérant ainsi sur toute l'étendue de la région, il viendra

$$\int U \frac{dT_3}{dy} d\sigma = \int UT_3 nds - \int T_3 \frac{dU}{dy} d\sigma,$$

les intégrales où entre $d\sigma$ étant prises sur toute l'étendue de la région considérée et celle où entre ds l'étant sur tout le contour de cette région. On opérera de même pour tous les termes qui contiennent une dérivée des N, T par rapport à y ou par rapport à z, et la relation

$$\int \left[U \left(\frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \frac{dN_1}{dx} + \rho X \right) + V \left(\frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + \frac{dT_3}{dx} + \rho Y \right) \right.$$
$$\left. + W \left(\frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + \frac{dT_2}{dx} + \rho Z \right) \right] d\sigma = 0$$

deviendra

$$\int [U(nT_3 + pT_2) + V(nN_2 + pT_1) + W(nT_1 + pN_3)] ds$$
$$- \int \left[T_3 \frac{dU}{dy} + T_2 \frac{dU}{dz} + N_2 \frac{dV}{dy} + N_3 \frac{dW}{dz} + T_1 \left(\frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dy} \right) \right] d\sigma$$
$$+ \int \left[U \left(\frac{dN_1}{dx} + \rho X \right) + V \left(\frac{dT_3}{dx} + \rho Y \right) + W \left(\frac{dT_2}{dx} + \rho Z \right) \right] d\sigma = 0.$$

Si l'on ajoute tous les résultats pareils relatifs aux diverses régions de la section σ, les intégrales prises sur les lignes s_1 se détruiront; car, à la limite de deux régions adjacentes, U, V, W auront les mêmes valeurs par hypothèse, et les expressions $nT_3 + pT_2$, $nN_2 + pT_1$, $nT_1 + pN_3$ seront égales en valeur absolue, d'après les conditions spéciales aux lignes s_1, mais de signes contraires à cause des deux directions oppo-

sées que prend la normale suivant qu'elle est menée hors d'une région ou hors de l'autre. Les intégrales prises sur le contour s étant d'ailleurs nulles d'après les relations (14), il viendra, en désignant par $\int_\sigma$ des intégrales prises sur toute l'étendue de la section σ,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\sigma \left[T_3 \frac{dU}{dy} + T_2 \frac{dU}{dz} + N_2 \frac{dV}{dy} + N_3 \frac{dW}{dz} + T_1 \left(\frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dy} \right) \right] d\sigma \\ &\quad = \int_\sigma \left[U \left(\frac{dN_1}{dx} + \rho X \right) + V \left(\frac{dT_3}{dx} + \rho Y \right) + W \left(\frac{dT_2}{dx} + \rho Z \right) \right] d\sigma. \end{aligned}\right.$$

C'est la relation importante que je me proposais d'établir.

Considérons encore une des régions de σ dans lesquelles la constitution de la matière ne varie qu'avec continuité d'un point aux points voisins, et observons qu'il est naturel d'y supposer les forces élastiques N, T, variables également d'une manière continue. Le contour de cette région a au moins deux éléments perpendiculaires à l'axe des y et deux perpendiculaires à l'axe des z. La condition spéciale à ce contour montre qu'aux premiers de ces éléments les forces T_3, N_2, T_1 sont les mêmes que dans la région adjacente, et qu'il en est ainsi aux seconds de ces éléments pour les forces T_2, T_1, N_3. Or, en passant de ces nouvelles régions dans d'autres, et considérant les éléments des contours de séparation qui sont perpendiculaires, soit aux y, soit aux z, on finira par arriver à des éléments pareils du contour même de la section σ, éléments sur lesquels on a, d'après (14), soit $T_3 = N_2 = T_1 = 0$, soit $T_2 = T_1 = N_3 = 0$. Donc, la section σ ayant toutes ses dimensions très-petites, les forces N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 ne peuvent qu'être fort petites dans toute son étendue par rapport aux valeurs absolues moyennes de leurs dérivées premières en y et z. D'ailleurs la continuité, sur une longueur finie de la tige, des N, T et de leurs dérivées en y, z, exige que les dérivées en x de toutes ces quantités ne soient pas d'un ordre de grandeur plus élevé que l'ordre de ces quantités elles-mêmes, si ce n'est toutefois aux points voisins des extrémités de la tige, ou plus généralement, de ceux où la constitution de la matière et les conditions dans lesquelles elle se trouve varieraient brusquement dans le sens des x. Si l'on fait abstraction de ces points tout particuliers, les

deux dernières équations (2) pourront être réduites à

$$\frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = 0, \quad \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = 0.$$

En effet, si nous considérons, par exemple, la seconde des équations (2), les termes $\frac{dN_2}{dy}$, $\frac{dT_1}{dz}$ pourront être, soit de l'ordre de $\frac{dT_3}{dx}$, soit incomparablement plus petits, soit incomparablement plus grands. Dans les deux premiers cas, N_2 et T_1 seront, d'après ce qui précède, négligeables par rapport à T_3 [*], et l'on pourra poser en comparaison $N_2 = 0$, $T_1 = 0$; dans le troisième cas, la seconde équation (2) se réduira sensiblement aux deux termes $\frac{dN_2}{dy}$, $\frac{dT_1}{dz}$, car le dernier ρY n'est jamais que de l'ordre de $\frac{dT_3}{dx}$. Donc on pourra poser toujours $\frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = 0$. Les deux dernières équations (2) étant ainsi simplifiées, la relation générale (15), si l'on y fait $U = 0$, se réduit à

$$(15\ bis) \qquad \int_\sigma \left[N_2 \frac{dV}{dy} + N_3 \frac{dW}{dz} + T_1 \left(\frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dy} \right) \right] d\sigma = 0.$$

Faisons-y successivement $W = 0$, $V = y$, $= z$, $= y^2$, $= yz$, $= z^2$, et $V = 0$, $W = z$, $= y$, $= z^2$, $= zy$, $= y^2$, et il viendra aisément les neuf relations

$$(16) \qquad \begin{cases} \int_\sigma (N_2, N_3 \text{ ou } T_1)\, d\sigma = 0, \\ \int_\sigma (N_2, N_3 \text{ ou } T_1)\, y\, d\sigma = 0, \\ \int_\sigma (N_2, N_3 \text{ ou } T_1)\, z\, d\sigma = 0. \end{cases}$$

Si, au contraire, nous supposons $V = v$, $W = w$, la relation (15 *bis*) devient

$$(17) \qquad \int_\sigma [N_2 \partial_y + N_3 \partial_z + T_1 g_{yz}]\, d\sigma = 0.$$

---

[*] Car on vient de voir que N_2 et T_1 sont négligeables devant leurs dérivées premières en y, z, dérivées supposées au plus, dans ces deux premiers cas, comparables à $\frac{dT_3}{dx}$ et par suite à T_3.

Enfin, supposons qu'on différentie en x la première équation (2), en admettant, ce qui aura toujours lieu, que la dérivée $\frac{d\rho X}{dx}$ ne soit pas beaucoup plus grande que la dérivée seconde $\frac{d^2 N_1}{dx^2}$: celle-ci devra être du même ordre que les dérivées premières en y, z de $\frac{dT_3}{dx}$, $\frac{dT_2}{dx}$, c'est-à-dire au plus du même ordre que $\frac{dT_3}{dy}$, $\frac{dT_2}{dz}$.

§ IV. — *Détermination de* N_2, N_3, T_1.

Je me bornerai au cas où la tige est d'une contexture symétrique par rapport au plan des yz, c'est-à-dire au cas où les ∂, g sont donnés en fonction des N, T par les formules (9), et je supposerai même que les coefficients η, η', η'' soient constants sur toute l'étendue d'une même section. Les ∂, g auront généralement leurs dérivées en x, y, z comparables aux dérivées pareilles des N, T [*]. En particulier, les dérivées secondes en x de ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz} seront du même ordre que les dérivées secondes en x de N_1, N_2, N_3, T_1, c'est-à-dire, d'après la remarque qui termine le paragraphe précédent, au plus du même ordre que N_2, N_3, T_1, $\frac{dT_3}{dy}$, $\frac{dT_2}{dz}$. Il en sera de même des dérivées premières en y, z de $\frac{dg_{zx}}{dx}$, $\frac{dg_{xy}}{dx}$, dérivées comparables aux dérivées pareilles de g_{zx}, g_{xy} ou de T_2, T_3. Il suit de là que la première et les deux dernières des relations (4) pourront s'écrire à fort peu près

$$\frac{d^2\partial_x}{dy\,dz} = 0, \quad \frac{d^2\partial_x}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2\partial_x}{dy^2} = 0.$$

Elles donnent en effet dans chaque région de σ, pour les dérivées secondes en y et z de ∂_x, des valeurs au plus comparables à N_2, N_3, T_1, $\frac{dT_3}{dy}$, $\frac{dT_2}{dz}$; par suite, en multipliant ces valeurs par dy ou dz et intégrant,

[*] J'admets dans ce paragraphe, pour abréger le langage, que l'unité de force choisie soit telle, que les N, T se trouvent numériquement du même ordre de grandeur que les ∂, g.

on trouvera que les parties, variables avec y, z dans chaque région, de $\frac{d\partial_x}{dy}$, $\frac{d\partial_x}{dz}$, sont au plus comparables aux produits de N_2, N_3, T_1 par y, z et aux parties variables de T_3, T_2, lesquelles sont elles-mêmes du même ordre que T_3, T_2, ou que g_{xy}, g_{zx}. Or $\frac{d\partial_x}{dy}$, $\frac{d\partial_x}{dz}$ valent identiquement, d'après (1), $-\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dg_{xy}}{dx}$, $-\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{dg_{zx}}{dx}$, c'est-à-dire $-\frac{d^2v}{dx^2}$, $-\frac{d^2w}{dx^2}$, sauf erreur au plus comparable à g_{xy}, g_{zx}, et v, w, ainsi par suite que leurs dérivées secondes en x, sont continues sur toute l'étendue d'une section σ : donc les dérivées premières $\frac{d\partial_x}{dy}$, $\frac{d\partial_x}{dz}$ sont égales, sur toute l'étendue d'une section σ, à deux quantités constantes, augmentées de termes au plus comparables aux produits de N_2, N_3, T_1 par y, z, et à T_3, T_2. En multipliant encore par dy, dz, ajoutant et intégrant, ces termes ne donneront dans ∂_x que des parties négligeables, c'est-à-dire insensibles en comparaison de N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, et aussi en comparaison des ∂, g. Par conséquent, si l'on appelle $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ trois fonctions arbitraires de x, et si l'on observe que u et par suite $\frac{du}{dx}$ ou ∂_x sont continus sur toute l'étendue de σ, il viendra

$$(18) \qquad \partial_x = \mathcal{A} + \mathcal{B}z + \mathcal{B}_1 y.$$

Étudions actuellement l'expression $N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz}$ qui entre dans le premier membre de (17). Elle fait partie de l'expression plus générale, essentiellement positive, qui constitue le premier membre de l'inégalité (12 *bis*) et qui a été désignée par 2Φ. Comme, d'après les formules (9), ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz} ne dépendent que de N_1, N_2, N_3, T_1, et g_{zx}, g_{xy} de T_2, T_3, cette expression plus générale est la somme de deux autres entièrement distinctes et essentiellement positives, car chacune d'elles peut subsister quand l'autre est nulle; la seconde, ne contenant que T_2, T_3, pourra être mise sous la forme $e(T_2+\varepsilon T_3)^2+fT_3^2$, c'est-à-dire qu'on aura

$$(19) \qquad T_2 g_{zx} + T_3 g_{xy} = e(T_2+\varepsilon T_3)^2 + fT_3^2;$$

la première, $N_1\partial_x + N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz}$, contenant N_1, N_2, N_3, T_1, sera la somme de quatre carrés, dont le premier est, d'après les for-

mules (9),

$$\mathrm{A}\left(\mathrm{N}_1 - \frac{\mathrm{BN}_2 + \mathrm{B}'\mathrm{N}_3 - \mathrm{CT}_1}{2\mathrm{A}} - \frac{\eta\mathrm{N}_2 + \eta'\mathrm{N}_3 - \eta''\mathrm{T}_1}{2}\right)^2,$$

et dont les trois autres ont la forme

$$\mathrm{b}(\mathrm{N}_2 + \beta\mathrm{N}_3 + \beta'\mathrm{T}_1)^2, \quad \mathrm{c}(\mathrm{N}_3 + \gamma\mathrm{T}_1)^2, \quad \mathrm{dT}_1^2.$$

La partie de cette expression qui est indépendante de N_1 serait évidemment identique à $\mathrm{N}_2\partial_y + \mathrm{N}_3\partial_z + \mathrm{T}_1 g_{yz}$, si, avant de substituer à ∂_y, ∂_z, g_{yz} leurs valeurs (9), on en ôtait les trois termes affectés de N_1, termes qui sont respectivement $-\eta\mathrm{AN}_1$, $-\eta'\mathrm{AN}_1$, $\eta''\mathrm{AN}_1$. On a donc l'identité

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{BN}_2 + \mathrm{B}'\mathrm{N}_3 - \mathrm{CT}_1}{2\mathrm{A}} + \frac{\eta\mathrm{N}_2 + \eta'\mathrm{N}_3 - \eta''\mathrm{T}_1}{2}\right)^2 \\
&\quad + \mathrm{b}(\mathrm{N}_2 + \beta\mathrm{N}_3 + \beta'\mathrm{T}_1)^2 + \mathrm{c}(\mathrm{N}_3 + \gamma\mathrm{T}_1)^2 + \mathrm{dT}_1^2 \\
&\qquad = (\mathrm{N}_2\partial_y + \mathrm{N}_3\partial_z + \mathrm{T}_1 g_{yz}) + \mathrm{AN}_1(\eta\mathrm{N}_2 + \eta'\mathrm{N}_3 - \eta''\mathrm{T}_1),
\end{aligned}$$

ou bien, après quelques transformations faciles et en remplaçant $\mathrm{BN}_2 + \mathrm{B}'\mathrm{N}_3 - \mathrm{CT}_1 - \mathrm{AN}_1$ par $-\partial_x$,

$$(19\,bis)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{N}_2\partial_y + \mathrm{N}_3\partial_z + \mathrm{T}_1 g_{yz} \\
&\quad = \mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{BN}_2 + \mathrm{B}'\mathrm{N}_3 - \mathrm{CT}_1}{2\mathrm{A}} - \frac{\eta\mathrm{N}_2 + \eta'\mathrm{N}_3 - \eta''\mathrm{T}_1}{2}\right)^2 \\
&\qquad + \mathrm{b}(\mathrm{N}_2 + \beta\mathrm{N}_3 + \beta'\mathrm{T}_1)^2 + \mathrm{c}(\mathrm{N}_3 + \gamma\mathrm{T}_1)^2 \\
&\qquad + \mathrm{dT}_1^2 - (\eta\mathrm{N}_2 + \eta'\mathrm{N}_3 - \eta''\mathrm{T}_1)\partial_x.
\end{aligned}\right.$$

Substituons, dans (17), le second membre de cette relation (19 *bis*) au premier, et observons que, ∂_x étant linéaire en y et z, et les coefficients η, η', η'' étant supposés constants dans toute l'étendue de σ, les neuf formules (16) donnent

$$\int_\sigma (\eta\mathrm{N}_2 + \eta'\mathrm{N}_3 - \eta''\mathrm{T}_1)\partial_x = 0;$$

il viendra

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_\sigma \left[\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{BN}_2 + \mathrm{B}'\mathrm{N}_3 - \mathrm{CT}_1}{2\mathrm{A}} - \frac{\eta\mathrm{N}_2 + \eta'\mathrm{N}_3 - \eta''\mathrm{T}_1}{2}\right)^2\right. \\
&\qquad \left. + \mathrm{b}(\mathrm{N}_2 + \beta\mathrm{N}_3 + \beta'\mathrm{T}_1)^2 + \mathrm{c}(\mathrm{N}_3 + \gamma\mathrm{T}_1)^2 + \mathrm{dT}_1^2\right] d\sigma = 0.
\end{aligned}\right.$$

L'intégrale du premier membre, formée d'éléments qui sont la somme de quatre carrés, ne peut être nulle que si chacun de ces carrés s'annule identiquement. On aura donc partout

$$(21)\qquad T_1 = 0,\quad N_3 = 0,\quad N_2 = 0,$$

et par suite, d'après (9),

$$(22)\qquad \partial_y = -\eta\partial_x,\quad \partial_z = -\eta'\partial_x,\quad g_{yz} = \eta''\partial_x,$$

valeurs qui, en y substituant l'expression (18) de ∂_x, rendent identique la quatrième condition de compatibilité (4).

Ainsi, *lorsqu'une tige de contexture symétrique par rapport à ses sections normales n'est soumise sur sa surface à aucune action, si ce n'est vers ses extrémités, et que, de plus, ses fibres longitudinales sont constituées de telle manière qu'elles subiraient d'égales déformations latérales* ∂_y, ∂_z, g_{yz}, *si on les soumettait à des tractions produisant sur toutes la même dilatation* ∂_x, *cette dilatation et les déformations latérales* ∂_y, ∂_z, g_{yz} *varient, à fort peu près, linéairement sur toute l'étendue de chaque section, et les composantes, perpendiculaires à l'axe de la tige, des forces élastiques exercées sur les éléments plans parallèles à cet axe, peuvent être négligées par rapport aux autres forces élastiques. Toutefois il peut y avoir exception pour les parties de la tige très-voisines de ses extrémités.*

Si l'on substitue, dans les trois relations (22), à ∂_x sa valeur (18), et à ∂_y, ∂_z, g_{yz} leurs expressions (1), les deux premières, multipliées respectivement par dy, dz et intégrées, donneront, en appelant f_1, f_2 des fonctions arbitraires de deux variables,

$$(23)\qquad \begin{cases} v = f_1(z,x) - \eta\left(\mathcal{A}y + \mathcal{B}yz + \frac{1}{2}\mathcal{B}_1 y^2\right), \\ w = f_2(y,x) - \eta'\left(\mathcal{A}z + \mathcal{B}_1 zy + \frac{1}{2}\mathcal{B}z^2\right). \end{cases}$$

La troisième (22) devient ensuite

$$(24)\qquad -\frac{df_1}{dz} + \left[\tfrac{1}{2}\eta''\mathcal{A} + (\eta'\mathcal{B}_1 + \eta''\mathcal{B})z\right] = \frac{df_2}{dy} - \left[\tfrac{1}{2}\eta''\mathcal{A} + (\eta\mathcal{B} + \eta''\mathcal{B}_1)y\right];$$

or le premier membre de celle-ci est indépendant de y, et le second

l'est de z. L'un et l'autre sont donc une simple fonction $\mathcal{C}$ de x, et l'on a

$$\frac{df_1}{dz} = -\mathcal{C} + \left[\tfrac{1}{2}\eta''\mathcal{A} + (\eta'\mathcal{B}_1 + \eta''\mathcal{B})z\right],$$

$$\frac{df_2}{dy} = \mathcal{C} + \left[\tfrac{1}{2}\eta''\mathcal{A} + (\eta\mathcal{B} + \eta''\mathcal{B}_1)y\right];$$

d'où il résulte, en intégrant après avoir respectivement multiplié par dz, dy, et en appelant $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ certaines fonctions de x,

$$(25)\quad \begin{cases} v = \mathcal{D} - \mathcal{C}z + \frac{1}{2}\left[\eta''\mathcal{A}z + (\eta'\mathcal{B}_1 + \eta''\mathcal{B})z^2\right] \\ \qquad - \eta\left[\mathcal{A}y + \mathcal{B}yz + \frac{1}{2}\mathcal{B}_1 y^2\right], \\ w = \mathcal{D}_1 + \mathcal{C}y + \frac{1}{2}\left[\eta''\mathcal{A}y + (\eta\mathcal{B} + \eta''\mathcal{B}_1)y^2\right] \\ \qquad - \eta'\left[\mathcal{A}z + \mathcal{B}_1 zy + \frac{1}{2}\mathcal{B}z^2\right]. \end{cases}$$

Exprimons qu'avec ces valeurs de v, w, l'expression $\frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$ ou $\left(g_{xy} - \frac{dv}{dx}\right)dy + \left(g_{zx} - \frac{dw}{dx}\right)dz$ est une différentielle exacte, c'est-à-dire que la dérivée en z de $g_{xy} - \frac{dv}{dx}$ est égale à la dérivée en y de $g_{zx} - \frac{dw}{dx}$: en appelant K la dérivée de $\mathcal{C}$ par rapport à x, il viendra la relation suivante, qu'on peut appeler *condition d'intégrabilité de u*,

$$(26)\quad \frac{dg_{xy}}{dz} - \frac{dg_{zx}}{dy} + 2\mathrm{K} + \frac{d(2\eta\mathcal{B} + \eta''\mathcal{B}_1)}{dx}y - \frac{d(2\eta'\mathcal{B}_1 + \eta''\mathcal{B})}{dx}z = 0.$$

La seconde et la troisième des conditions de compatibilité (4) sont actuellement vérifiées, comme les quatre autres; car, si l'on y remplace ∂_y, ∂_z, g_{yz} par leurs expressions linéaires en y et z, ces conditions deviennent identiques à la relation (26) différentiée en y ou en z.

§ V. — *Détermination de* N_1, T_3, T_2.

Les composantes N_2, N_3, T_1 étant nulles, la première formule (9) donne, en représentant comme à l'ordinaire par E le coefficient d'élasticité $\frac{1}{A}$,

$$(27)\quad N_1 = E\partial_x = E(\mathcal{A} + \mathcal{B}z + \mathcal{B}_1 y);$$

la force N_1 sera donc connue si nous parvenons à obtenir les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$.

Occupons-nous actuellement des forces élastiques T_2, T_3, les seules dont la forme reste à déterminer. Comme nous avons déjà satisfait aux deux dernières équations indéfinies (2), aux six conditions de compatibilité (4), aux équations définies concernant N_2, N_3, T_1 et aux conditions de continuité de v et w, nous ne pouvons plus employer, outre les formules obtenues au paragraphe précédent et la condition de continuité de u sur toute l'étendue de la section σ, que la première équation indéfinie (2), la première relation (14), spéciale au contour s, et la relation analogue relative aux lignes s_1. Ces équations, en remplaçant dans la première $\frac{dN_1}{dx}$ par sa valeur tirée de (27), sont :

$$(28)\qquad \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \rho X + \frac{d.E\mathcal{A}}{dx} + \frac{d.E\mathcal{B}}{dx}z + \frac{d.E\mathcal{B}_1}{dx}y = 0;$$

(29) sur tout le contour s, $T_3 dz - T_2 dy = 0$;
en un point quelconque d'une ligne s_1, l'expression $T_3 dz - T_2 dy$ doit prendre des valeurs égales dans les deux régions de σ que cette ligne sépare.

On substituera dans ces équations, à T_3, T_2, leurs expressions linéaires en fonction de g_{xy}, g_{zx}, puis à g_{xy}, g_{zx}, leurs valeurs $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$, $\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}$, et enfin à $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$ les expressions que les relations (25), différentiées en x, donneront pour ces dérivées. Les équations (28) et (29) ne contiendront plus d'autres inconnues que u et de simples fonctions de x, notamment $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}$. Il est clair qu'il faut chercher d'autres relations pouvant servir à déterminer ces fonctions de x.

Pour cela, concevons d'abord qu'on assimile les sections normales σ à des surfaces matérielles ayant en chacun de leurs points, par unité d'aire, une masse égale à la valeur du coefficient d'élasticité E en ce point; comme la tige est supposée sensiblement cylindrique et sa constitution peu variable avec x, nous pouvons admettre que les centres de gravité de ces surfaces soient tous, sur une petite longueur, alignés à peu près le long d'une même droite à laquelle elles sont précisément

normales et qui est l'axe de la tige, et admettre aussi que les axes principaux d'inertie des mêmes surfaces, relatifs à ces centres de gravité, se trouvent tous, antérieurement aux déplacements, dans deux plans rectangulaires passant par l'axe de la tige. Nous supposerons que les axes des x, y, z, par rapport auxquels les déplacements d'une partie assez courte de la tige sont très-petits, aient été choisis de manière à coïncider primitivement avec l'axe de la tige et avec les deux axes d'inertie principaux d'une des sections σ comprises dans cette partie. D'après les propriétés connues des centres de gravité et des axes d'inertie principaux, on aura, pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites assez rapprochées,

$$(30) \qquad \int_\sigma \mathrm{E}y\,d\sigma = \int_\sigma \mathrm{E}z\,d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \mathrm{E}yz\,d\sigma = 0.$$

De plus, si l'on appelle $\mathcal{E}$ la valeur moyenne de E sur toute l'étendue d'une section, $\mathcal{E}\mathrm{I}$, $\mathcal{E}\mathrm{I}'$ les deux moments d'inertie principaux de cette section relatifs à son centre de gravité, ces quantités auront pour valeurs

$$(31) \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma \mathrm{E}\,d\sigma, \quad \mathcal{E}\mathrm{I} = \int_\sigma \mathrm{E}z^2\,d\sigma, \quad \mathcal{E}\mathrm{I}' = \int_\sigma \mathrm{E}y^2\,d\sigma.$$

Cela posé, menons, par le centre de gravité d'une section $x = x_0$, trois axes parallèles à ceux des x, des y et des z, et observons que le problème de l'équilibre serait indéterminé si l'on ne donnait pas les résultantes suivant ces trois axes des forces qui agissent sur toute la portion de la tige située au delà de la section considérée, du côté des x positifs, et les moments totaux de ces forces par rapport aux mêmes axes. Appelons respectivement $\mathfrak{N}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$ ces résultantes, et M, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ ces moments, quantités supposées connues, et, d'apres des principes élémentaires de statique, égalons-les aux résultantes et aux moments pareils des forces extérieures $\rho\mathrm{X}$, $\rho\mathrm{Y}$, $\rho\mathrm{Z}$ qui agissent par unité de volume sur le tronçon de la tige compris entre la section $x = x_0$ et une autre section assez voisine $x = x_0 + \Delta x$, et des actions élastiques exercées sur cette seconde section. Les résultantes de toutes ces forces sont respectivement, suivant les axes menés

par le centre de gravité de la section $x = x_0$, parallèlement à ceux des x, des y et des z,

$$
(32)\quad \begin{cases}
\mathcal{N} = \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho X \, d\sigma + \int_\sigma N_1 \, d\sigma, \\
\mathcal{F}_1 = \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho Y \, d\sigma + \int_\sigma T_3 \, d\sigma, \\
\mathcal{F} = \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho Z \, d\sigma + \int_\sigma T_2 \, d\sigma.
\end{cases}
$$

Pour obtenir leurs moments respectifs autour des mêmes axes, observons que les coordonnées des divers points du tronçon, par rapport à ces axes, n'ont pu changer que de quantités insensibles à cause de la petitesse des déformations ∂, g, et qu'on peut les supposer, après les déplacements, à fort peu près égales à leurs valeurs primitives $x - x_0$, y, z. Les moments cherchés seront ainsi

$$
(32\ bis)\quad \begin{cases}
M = \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho (yZ - zY) \, d\sigma + \int_\sigma (y T_2 - z T_3) \, d\sigma, \\
\mathfrak{M} = \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho [zX - (x - x_0) Z] \, d\sigma + \int_\sigma [z N_1 - (x - x_0) T_2] \, d\sigma, \\
\mathfrak{M}_1 = \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho [(x - x_0) Y - yX] \, d\sigma + \int_\sigma [(x - x_0) T_3 - y N_1] \, d\sigma.
\end{cases}
$$

Dans la première formule (32) et dans les deux dernières (32 *bis*), substituons à N_1 sa valeur (27), et tenons compte des relations (30) et (31). Il viendra

$$
\int_\sigma N_1 \, d\sigma = \mathcal{A} \mathcal{E} \sigma, \quad \int_\sigma z N_1 \, d\sigma = \mathcal{B} \mathcal{E} I, \quad \int_\sigma y N_1 \, d\sigma = \mathcal{B}_1 \mathcal{E} I'.
$$

Remplaçons en outre, dans les deux dernières relations (32 *bis*), $\int_\sigma T_2 \, d\sigma$, $\int_\sigma T_3 \, d\sigma$ par leurs valeurs tirées des deux dernières (32), et

ensuite les termes

$$-(x-x_0)\mathfrak{F}, \quad -(x-x_0)\mathfrak{F}_1,$$
$$(x-x_0)\int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho Z d\sigma.$$
$$(x-x_0)\int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho_i Y d\sigma,$$

respectivement par les expressions suivantes, qui ont les mêmes valeurs, ainsi qu'on le reconnaît en différentiant ces termes,

$$-\int_{x_0}^{x} \mathfrak{F} dx, \quad -\int_{x_0}^{x} \mathfrak{F}_1 dx,$$
$$\int_{x_0}^{x}\left[(x-x_0)\int_\sigma \rho Z d\sigma + \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho Z d\sigma\right]dx,$$
$$\int_{x_0}^{x}\left[(x-x_0)\int_\sigma \rho Y d\sigma + \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho Y d\sigma\right]dx.$$

La premiere relation (32) et les trois (32 *bis*) deviendront

$$(33)\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{N} &= \mathfrak{A}\mathcal{E}\sigma + \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho X d\sigma,\\
\mathfrak{M} &= \mathfrak{B}\mathcal{E}I + \int_{x_0}^{x}\left[-\mathfrak{F} + \int_\sigma \rho z X d\sigma + \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho Z d\sigma\right]dx,\\
-\mathfrak{M}_1 &= \mathfrak{B}_1\mathcal{E}I' + \int_{x_0}^{x}\left[-\mathfrak{F}_1 + \int_\sigma \rho y X d\sigma + \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho Y d\sigma\right]dx,\\
M &= \int_\sigma (yT_2 - zT_3)\, d\sigma + \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho(yZ - zY)\, d\sigma.
\end{aligned}\right.$$

Quant aux deux dernières (32), il est inutile de s'en occuper; car elles résultent de l'équation (28), des deux conditions spéciales (29) et des valeurs de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ données par deux des relations (33). En effet, si, U désignant une fonction continue quelconque de x, y, z, on multiplie la première (28) par $U d\sigma$, et si l'on intègre dans toute l'étendue d'une section σ, en opérant comme on l'a fait pour établir la for-

mule (15), et en tenant compte des deux premières conditions spéciales (29), il viendra

$$(34)\quad \int_\sigma \left(T_3 \frac{dU}{dy} + T_2 \frac{dU}{dz}\right) d\sigma = \int_\sigma U \left(\rho X + \frac{d.E\mathcal{A}}{dx} + \frac{d.E\mathcal{B}}{dx} z + \frac{d.E\mathcal{B}_1}{dx} y\right) d\sigma.$$

Or cette relation, suivant qu'on pose $U = y$ ou $U = z$, devient aisément l'une ou l'autre des deux dernières (32). Faisons, par exemple, $U = z$, remplaçons, dans (34), $\frac{d.E\mathcal{A}}{dx}$ par $E\frac{d\mathcal{A}}{dx} + \mathcal{A}\frac{dE}{dx}$, et de même $\frac{d.E\mathcal{B}}{dx}$, $\frac{d.E\mathcal{B}_1}{dx}$ par leurs valeurs analogues, puis observons que, la surface latérale de la tige étant sensiblement cylindrique, on peut différentier, par rapport à x, les relations (30) et (31) sans faire varier σ ni $d\sigma$, et écrire notamment

$$\int_\sigma \frac{dE}{dx} y\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \frac{dE}{dx} z\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \frac{dE}{dx} yz\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \frac{dE}{dx} z^2 d\sigma = \frac{d.\mathcal{E}I}{dx}:$$

la relation (34) sera simplement

$$(35)\quad \int_\sigma T_2 d\sigma = \int_\sigma \rho z X d\sigma + \frac{d\mathcal{B}}{dx}\mathcal{E}I + \mathcal{B}\frac{d.\mathcal{E}I}{dx} = \int_\sigma \rho z X d\sigma + \frac{d.\mathcal{B}\mathcal{E}I}{dx};$$

or la seconde (33), différentiée par rapport à x, donne

$$\frac{d.\mathcal{B}\mathcal{E}I}{dx} = \tilde{\mathcal{F}} - \int_\sigma \rho z X d\sigma - \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho Z d\sigma,$$

ce qui rend la relation (35) identique à la troisième (32).

Les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ étant fournies par les trois premières formules (33), il est clair que la relation (27) fera complétement connaître N_1; je vais démontrer que les relations (28), (29), et la quatrième (33) déterminent ensuite T_3, T_2, pourvu qu'on y remplace provisoirement, comme il a été dit, T_3, T_2 par leurs expressions linéaires en fonction de g_{zx}, g_{xy}, ces glissements eux-mêmes par leurs valeurs $\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}$, $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$, et $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ par les expressions que donnent pour ces dérivées les relations (25) différentiées en x.

Il suffit de faire voir pour cela que toutes les valeurs possibles de u, continues dans tout l'intérieur d'une section, qui vérifient ces équations pour des valeurs données de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, conduisent absolument aux mêmes valeurs de T_3, T_2, ou, en d'autres termes, que, si l'on remplace dans ces équations u par $u + u'$, les fonctions de x inconnues $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ par $\mathcal{C} + \mathcal{C}'$, $\mathcal{D} + \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1$, et enfin T_2, T_3, g_{zx}, g_{xy}, v, w, fonctions linéaires de u, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$, ou de leurs dérivées, par $T_2 + T'_2$, $T_3 + T'_3$, $g_{zx} + g'_{zx}$, $g_{xy} + g'_{xy}$, $v + v'$, $w + w'$, on aura forcément

$$T'_2 = 0, \quad T'_3 = 0.$$

En effet, la substitution de $u + u'$, $\mathcal{C} + \mathcal{C}'$, $\mathcal{D} + \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1$, $T_2 + T'_2$, $T_3 + T'_3$, $v + v'$, $w + w'$ à u, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$, T_2, T_3, v, w change les équations (25), (28), (29) et la dernière (33) en celles-ci :

$$(36) \qquad v' = \mathcal{D}' - \mathcal{C}'z, \quad w' = \mathcal{D}'_1 + \mathcal{C}'y;$$

$$(37) \qquad \frac{dT'_3}{dy} + \frac{dT'_2}{dz} = 0;$$

(38) $\begin{cases} \text{sur le contour } s, \quad T'_3\,dz - T'_2\,dy = 0: \\ \text{des deux côtés des lignes } s_1, \text{ l'expression } \; T'_3\,dz - T'_2\,dy \\ \text{prend des valeurs égales;} \end{cases}$

$$(39) \qquad 0 = \int_\sigma (yT'_2 - zT'_3)\,d\sigma.$$

Désignons par U' une fonction qui, comme u', varie avec continuité dans tout l'intérieur de chaque section, bien que ses dérivées puissent être discontinues sur les lignes s_1, et, après avoir multiplié (37) par $U'd\sigma$, intégrons par parties le résultat dans tout l'intérieur d'une section σ, en tenant compte des relations (38), comme nous l'avons fait pour établir la formule (34) ou la formule (15). Nous obtiendrons

$$(40) \qquad \int_\sigma \left(T'_3\,\frac{dU'}{dy} + T'_2\,\frac{dU'}{dz}\right) d\sigma = 0.$$

Supposons d'abord successivement $U' = y$ et $U' = z$, il viendra

$$(41) \qquad \int_\sigma T'_3\,d\sigma = 0, \quad \int_\sigma T'_2\,d\sigma = 0.$$

Faisons encore $U' = u'$, et observons que, d'après (36),

$$\frac{du'}{dy} = g'_{xy} - \frac{dv'}{dx} = g'_{xy} - \frac{d\mathfrak{P}'}{dx} + \frac{d\mathfrak{S}'}{dx} z, \quad \frac{du'}{dz} = g'_{xz} - \frac{d\mathfrak{P}'_1}{dx} - \frac{d\mathfrak{S}'}{dx} y;$$

la relation (40) donnera

$$\int_\sigma (T'_3 g'_{xy} + T'_2 g'_{zx}) d\sigma$$
$$= \frac{d\mathfrak{P}'}{dx} \int_\sigma T'_3 d\sigma + \frac{d\mathfrak{P}'_1}{dx} \int_\sigma T'_2 d\sigma + \frac{d\mathfrak{S}'}{dx} \int_\sigma (y T'_2 - z T'_3) d\sigma.$$

Or le second nombre de cette relation est nul, d'après (39) et (41). Donc le premier l'est aussi, et, comme l'expression $T'_2 g'_{zx} + T'_3 g'_{xy}$ est, par sa forme, essentiellement positive d'après (19), il faudra qu'on ait $T'_2 = 0$, $T'_3 = 0$.

Nous admettrons désormais que les intégrales $\int_\sigma \rho z X d\sigma$, $\int_\sigma \rho y X d\sigma$ soient négligeables dans les formules (33). Cette supposition est permise pour deux raisons : 1° l'expression $\int_\sigma \rho X d\sigma$ n'est généralement que de l'ordre de grandeur de $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}_1$, et les intégrales considérées étant au plus comparables au produit de cette expression par les dimensions transversales de la tige, sont négligeables devant $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}_1$; 2° ces mêmes intégrales seraient nulles si le centre des forces parallèles $\rho X d\sigma$, supposées appliquées aux éléments $d\sigma$ d'une section, coïncidait avec le centre de gravité de la section; or ces deux centres ne seront jamais qu'à une distance insensible l'un de l'autre.

Étudions spécialement le cas où la force X est supposée constante sur toute l'étendue d'une même section σ, et où, la tige étant homogène, les coefficients A ou $\frac{1}{E}$, η, η', η'', G, G', H, H' des formules (9) et la densité ρ sont constants. Les relations (30) et (31) se réduisent alors à

$$\int_\sigma y d\sigma = 0, \quad \int_\sigma z d\sigma = 0, \quad \int_\sigma yz d\sigma = 0, \quad \mathcal{E} = E, \quad I = \int_\sigma z^2 d\sigma, \quad I' = \int_\sigma y^2 d\sigma.$$

Proposons-nous de déterminer directement, dans ce cas, en fonction

des trois données $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$, M, les forces T_2, T_3 sur toute l'étendue de la section quelconque $x = x_0$. Les formules (33) donneront

$$(42)\quad \frac{d\mathcal{A}}{dx} = -\frac{\rho X}{E}, \quad \frac{d\mathcal{B}}{dx} = \frac{\mathcal{F}}{EI}, \quad \frac{d\mathcal{B}_1}{dx} = \frac{\mathcal{F}_1}{EI'}, \quad M = \int_\sigma (yT_2 - zT_3)\,d\sigma.$$

Si l'on appelle φ une certaine fonction de y, z, l'équation (28), qu'on pourra écrire

$$\frac{d}{dy}\left(T_3 + \frac{\mathcal{F}_1}{2I'}y^2\right) + \frac{d}{dz}\left(T_2 + \frac{\mathcal{F}}{2I}z^2\right) = 0,$$

permettra de poser

$$(43)\qquad T_2 = -\frac{d\varphi}{dy} - \frac{\mathcal{F}}{2I}z^2, \quad T_3 = \frac{d\varphi}{dz} - \frac{\mathcal{F}_1}{2I'}y^2;$$

la condition d'intégrabilité (26), si l'on y substitue à g_{zx}, g_{xy} leurs valeurs (9), deviendra l'équation indéfinie

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} &G\frac{d^2\varphi}{dy^2} + G'\frac{d^2\varphi}{dz^2} - (H + H')\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} \\ &\quad + 2K + \frac{\mathcal{F}}{EI}[2\eta y - (\eta'' + H'E)z] - \frac{\mathcal{F}_1}{EI'}[2\eta' z - (\eta'' + HE)y] = 0. \end{aligned}\right.$$

Enfin la condition (29), spéciale au contour s, donnera

$$(45)\qquad d\varphi + \frac{\mathcal{F}}{2I}z^2\,dy - \frac{\mathcal{F}_1}{2I'}y^2\,dz = 0 \quad \text{(le long du contour } s\text{)}.$$

et la quatrième relation (42) sera changée en

$$(46)\qquad M = -\int_\sigma\left(y\frac{d\varphi}{dy} + z\frac{d\varphi}{dz} + \frac{\mathcal{F}}{2I}yz^2 - \frac{\mathcal{F}_1}{2I'}zy^2\right)d\sigma.$$

Lorsque la tige est pleine, c'est-à-dire que le contour s ne comprend qu'une seule courbe fermée, ces relations déterminent φ, à cela près d'une constante arbitraire qui ne change rien aux dérivées de φ en y et z, ni par suite à T_2, T_3. Mais il n'en est plus ainsi lorsque la tige est creuse, ou que le contour s comprend une courbe extérieure et une ou plusieurs autres courbes distinctes et fermées, situées dans la

première. En effet, la condition d'intégrabilité (26) ou (44) exprime seulement que l'intégrale

$$\int du \quad \text{ou} \quad \int\left(g_{xy}\,dy + g_{zx}\,dz - \frac{dv}{dx}\,dy - \frac{dw}{dx}\,dz\right),$$

prise entre deux points extrêmes et le long d'une certaine ligne, a la même valeur, si l'on remplace cette ligne par une autre infiniment voisine qui joigne les mêmes points extrêmes. Lorsque la section σ est pleine, deux lignes quelconques qui joignent deux points peuvent être amenées à coïncider au moyen d'une série de déformations infiniment petites qui rapprochent de plus en plus l'une d'elles de l'autre, et, par suite, la constance de u pour une valeur quelconque de y et z est assurée au moyen de la condition (44), quel que soit le chemin qui conduise au point (y, z). Mais il n'en est pas ainsi lorsque la section comprend dans son intérieur un ou plusieurs espaces qui lui sont étrangers.

Les déplacements u et par suite la relation (44) n'étant considérés que dans les espaces appartenant à σ, on ne pourra relier, au moyen de déformations infiniment petites, deux lignes menées entre deux points, qu'autant que ces lignes ne comprendront entre elles aucune des courbes intérieures qui font partie du contour s. Dans le cas contraire, on ne pourra passer de l'une de ces lignes à l'autre qu'au moyen de lignes intermédiaires telles, que deux successives diffèrent parfois de tout le contour d'une de ces courbes intérieures comprises entre les deux lignes considérées. La continuité de u ne sera donc assurée que si l'on a

$$(47) \qquad \int\left(g_{xy}\,dy + g_{zx}\,dz - \frac{dv}{dx}\,dy - \frac{dw}{dx}\,dz\right) = 0,$$

l'intégrale étant prise tout le long d'une quelconque des courbes fermées intérieures du contour s. On y substituera, à g_{xy}, g_{zx} leurs expressions (9) en fonction de T_2, T_3 et puis, d'après (43), en fonction de φ, à $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{dw}{dx}$ leurs valeurs tirées de (25) : on pourra faire abstraction, dans ces valeurs, des termes constants $\frac{d\mathfrak{O}}{dx}$, $\frac{d\mathfrak{O}_1}{dx}$, et de ceux qui

contiendront la dérivée de $\mathcal{A}$ en x, termes qui, multipliés par dy ou par dz, et intégrés sur toute la longueur d'un contour fermé, donnent zéro pour résultat.

Les relations (44), (45), (46) et (47) détermineront complétement φ, à une constante près. En effet, si nous y remplaçons φ par $\varphi + \varphi'$, K par $K + K'$, et si nous représentons $-\frac{d\varphi'}{dy}$, $\frac{d\varphi'}{dz}$ par $T'_2, T'_3, G'T'_3 + H'T'_2$, $GT'_2 + HT'_3$ par g'_{xy}, g'_{zx}, les relations (44), (45), (46) et (47) deviendront

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dg'_{xy}}{dz} - \dfrac{dg'_{zx}}{dy} + 2K' = 0, \\ d\varphi' = 0, \quad \text{sur le contour } s, \\ 0 = -\displaystyle\int_\sigma \left(y\frac{d\varphi'}{dy} + z\frac{d\varphi'}{dz}\right) d\sigma, \\ \displaystyle\int [g'_{xy}dy + g'_{zx}dz + K'(z\,dy - y\,dz)] = 0, \\ \quad \text{sur chaque courbe fermée intérieure du contour } s. \end{array}\right.$$

Enfin, sans rien changer aux dérivées de φ', on pourra supposer $\varphi' = 0$ en un point de la courbe extérieure du contour s, et, à cause de $d\varphi' = 0$ le long de cette courbe, la fonction φ' sera nulle sur toute sa longueur.

Multiplions la première équation (48) par $\varphi' d\sigma$, et intégrons par parties exactement comme nous avons fait pour la formule (15). En remplaçant les cosinus n, p par leurs valeurs (13 *ter*) et désignant par $\int_s$ une intégrale prise sur toute l'étendue du contour, il viendra

$$-\int_s \varphi'(g'_{xy}dy + g'_{zx}dz) - \int_\sigma \left(g'_{xy}\frac{d\varphi'}{dz} - g'_{zx}\frac{d\varphi'}{dy}\right)d\sigma + 2K'\int_\sigma \varphi' d\sigma = 0.$$

En intégrant de même par parties le second membre de la troisième relation (48), il vient

$$0 = -\int_s \varphi'(y\,dz - z\,dy) + 2\int_\sigma \varphi' d\sigma;$$

cette relation permet d'éliminer $2\int_\sigma \varphi' d\sigma$ de la précédente; celle-ci, en

y remplaçant $-\frac{d\varphi'}{dy}, \frac{d\varphi'}{dz}$ par T'_2, T'_3 devient ainsi

$$(49)\quad \left\{ \begin{aligned} &-\int_s \varphi'[g'_{xy}\,dy + g'_{zx}\,dz + K'(z\,dy - y\,dz)] \\ &\qquad\qquad -\int_\sigma (T'_3 g'_{xy} + T'_2 g'_{zx})\,d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

Or $\varphi' = 0$ sur la partie extérieure de s, ce qui annule la portion de la première intégrale de (49) qui concerne cette partie du contour : sur chacune des courbes intérieures de s, φ' est constant, puisqu'on y a $d\varphi' = 0$, et l'on peut faire sortir φ' du signe $\int$; mais alors chacune de ces portions devient nulle en vertu des quatrièmes relations (48). Il ne reste ainsi, dans (49), que la seconde intégrale, dont tous les éléments ont essentiellement le même signe, puisque, d'après (19), l'expression $T'_3 g'_{xy} + T'_2 g'_{zx}$ est positive par sa forme même. On aura donc forcément $T'_3 = 0$, $T'_2 = 0$, et, par suite, $\varphi' = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

En résumé, si l'on suppose données les actions extérieures exercées sur toute la masse de la tige et à ses extrémités, les forces élastiques T_3, T_2 seront connues sur une section quelconque de la tige, pourvu qu'on puisse effectuer les intégrations indiquées dans ce paragraphe. D'autre part, la formule (27) jointe aux trois premières (33), donnera N_1, et N_2, N_3, T_1 sont nulles. Donc toutes les forces élastiques exercées à l'intérieur de la tige seront connues, et il en sera par suite de même des six déformations élémentaires δ, g. Il faudra toutefois excepter les parties de la tige situées à de petites distances des extrémités; car les dérivées de N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, dans le sens de l'axe, n'y sont pas très-petites, comme le suppose notre analyse, par rapport à leurs dérivées dans les sens transversaux, si ce n'est pour certains modes très-particuliers d'application des forces qui agissent aux extrémités mêmes.

§ VI. — *Forme de la tige après les déplacements.*

La forme nouvelle de la tige sera connue, si l'on sait construire et associer, après les déplacements : 1° les divers éléments matériels in-

contiendront la dérivée de $\mathcal{A}$ en x, termes qui, multipliés par dy ou par dz, et intégrés sur toute la longueur d'un contour fermé, donnent zéro pour résultat.

Les relations (44), (45), (46) et (47) détermineront complétement φ, à une constante près. En effet, si nous y remplaçons φ par $\varphi + \varphi'$, K par $K + K'$, et si nous représentons $-\frac{d\varphi'}{dy}$, $\frac{d\varphi'}{dz}$ par $T'_2, T'_3, G'T'_3 + H'T'_2$, $GT'_2 + HT'_3$ par g'_{xy}, g'_{zx}, les relations (44), (45), (46) et (47) deviendront

$$(48)\quad \begin{cases} \dfrac{dg'_{xy}}{dz} - \dfrac{dg'_{zx}}{dy} + 2K' = 0, \\ d\varphi' = 0, \quad \text{sur le contour } s, \\ 0 = -\displaystyle\int_\sigma \left(y\frac{d\varphi'}{dy} + z\frac{d\varphi'}{dz}\right) d\sigma, \\ \int [g'_{xy}\,dy + g'_{zx}\,dz + K'(z\,dy - y\,dz)] = 0, \\ \quad \text{sur chaque courbe fermée intérieure du contour } s. \end{cases}$$

Enfin, sans rien changer aux dérivées de φ', on pourra supposer $\varphi' = 0$ en un point de la courbe extérieure du contour s, et, à cause de $d\varphi' = 0$ le long de cette courbe, la fonction φ' sera nulle sur toute sa longueur.

Multiplions la première équation (48) par $\varphi' d\sigma$, et intégrons par parties exactement comme nous avons fait pour la formule (15). En remplaçant les cosinus n, p par leurs valeurs (13 *ter*) et désignant par $\int_s$ une intégrale prise sur toute l'étendue du contour, il viendra

$$-\int_s \varphi'(g'_{xy}\,dy + g'_{zx}\,dz) - \int_\sigma \left(g'_{xy}\frac{d\varphi'}{dz} - g'_{zx}\frac{d\varphi'}{dy}\right)d\sigma + 2K'\int_\sigma \varphi'\,d\sigma = 0.$$

En intégrant de même par parties le second membre de la troisième relation (48), il vient

$$0 = -\int_s \varphi'(y\,dz - z\,dy) + 2\int_\sigma \varphi'\,d\sigma;$$

cette relation permet d'éliminer $2\int_\sigma \varphi'\,d\sigma$ de la précédente; celle-ci, en

y remplaçant $-\frac{d\varphi'}{dy}, \frac{d\varphi'}{dz}$ par T'_2, T'_3 devient ainsi

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &-\int_s \varphi'[g'_{xy}\,dy + g'_{zx}\,dz + K'(z\,dy - y\,dz)] \\ &\qquad\qquad - \int_\sigma (T'_3 g'_{xy} + T'_2 g'_{zx})\,d\sigma = 0. \end{aligned}\right.$$

Or $\varphi' = 0$ sur la partie extérieure de s, ce qui annule la portion de la première intégrale de (49) qui concerne cette partie du contour : sur chacune des courbes intérieures de s, φ' est constant, puisqu'on y a $d\varphi' = 0$, et l'on peut faire sortir φ' du signe $\int$; mais alors chacune de ces portions devient nulle en vertu des quatrièmes relations (48), Il ne reste ainsi, dans (49), que la seconde intégrale, dont tous les éléments ont essentiellement le même signe, puisque, d'après (19), l'expression $T'_3 g'_{xy} + T'_2 g'_{zx}$ est positive par sa forme même. On aura donc forcément $T'_3 = 0$, $T'_2 = 0$, et, par suite, $\varphi' = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

En résumé, si l'on suppose données les actions extérieures exercées sur toute la masse de la tige et à ses extrémités, les forces élastiques T_3, T_2 seront connues sur une section quelconque de la tige, pourvu qu'on puisse effectuer les intégrations indiquées dans ce paragraphe. D'autre part, la formule (27) jointe aux trois premières (33), donnera N_1, et N_2, N_3, T_1 sont nulles. Donc toutes les forces élastiques exercées à l'intérieur de la tige seront connues, et il en sera par suite de même des six déformations élémentaires ∂, g. Il faudra toutefois excepter les parties de la tige situées à de petites distances des extrémités; car les dérivées de N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, dans le sens de l'axe, n'y sont pas très-petites, comme le suppose notre analyse, par rapport à leurs dérivées dans les sens transversaux, si ce n'est pour certains modes très-particuliers d'application des forces qui agissent aux extrémités mêmes.

§ VI. — *Forme de la tige après les déplacements.*

La forme nouvelle de la tige sera connue, si l'on sait construire et associer, après les déplacements : 1° les divers éléments matériels in-

finiment petits en lesquels on peut supposer que son axe ait été préalablement divisé; 2° la surface en laquelle s'est changée la section, primitivement normale, menée par un point quelconque de cet axe. Nous appellerons s' la distance primitive, comptée le long de l'axe, d'une quelconque de ces sections, ou du point matériel où elle coupe l'axe, à une extrémité de celui-ci prise pour origine, et nous supposerons la tige divisée en tronçons infiniment minces dont l'un sera compris entre cette section normale et celle qui était d'abord à une distance de l'origine exprimée par $s' + ds'$.

Les points matériels compris dans le tronçon considéré seront rapportés, avant et après les déplacements, à un système d'axes rectangulaires de x', y', z', ayant : 1° son origine au point matériel de l'axe de la tige qui était d'abord à la distance s' de l'origine de la tige; 2° son axe des x' constamment tangent, en ce point, à l'axe de la tige, et 3° son plan des $x'y'$ également tangent à la ligne matérielle qui coïncidait, antérieurieurement aux déplacements, avec l'axe des y', et qui était un des axes d'inertie principaux de la section.

Nous appellerons x', y', z' les trois coordonnées primitives, par rapport à ce système d'axes, d'un point matériel quelconque du tronçon, et $x' + u'$, $y' + v'$, $z' + w'$ les coordonnées du même point apres les déplacements. Le tronçon n'ayant qu'une longueur primitive égale à ds', la coordonnée x' sera infiniment petite; de plus, les déplacements v', w' sont très-petits par rapport à y', z', sans quoi les déformations ∂, g ne seraient pas très-petites comme on le suppose. Enfin, pour $x' = y' = z' = 0$, on aura : 1° $u' = v' = w' = 0$, puisque le même point matériel sert toujours d'origine; 2° $\frac{dv'}{dx'} = \frac{dw'}{dx'} = 0$, puisque l'axe des x' est tangent à l'axe de la tige, ou que les déplacements v', w' sont nuls suivant cet axe sur une longueur infiniment petite; 3° $\frac{dw'}{dy'} = 0$, car le plan des $x'y'$ ne cesse pas de contenir, sur une longueur infiniment petite, la ligne matérielle qui coïncidait d'abord avec l'axe des y'. Il résulte donc du choix qu'on a fait des axes des x', y', z', les relations

$$(50)\quad u' = v' = w' = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dv'}{dx'} = \frac{dw'}{dx'} = \frac{dw'}{dy'} = 0, \quad \text{pour} \quad x' = y' = z' = 0.$$

Si l'axe de la tige, c'est-à-dire le lieu géométrique, antérieurement aux déplacements, des centres de gravité des sections normales (en supposant aux divers points de celles-ci des densités superficielles égales aux coefficients d'élasticité E en ces points), n'est pas occupé par la matière de la tige, mais se trouve situé, soit dans une cannelure formée par son contour extérieur, soit dans une cavité intérieure quand elle est tubulaire, on peut néanmoins se représenter cette cannelure ou cette cavité comme occupée par une matière d'une densité et d'une résistance infiniment petites, dont les divers points subiraient des déplacements transversaux v, w donnés par les mêmes formules (25) que ceux des points effectifs de la tige, et des déplacements longitudinaux u, continus, du même ordre de grandeur que ceux de la tige, et astreints seulement à être égaux, sur la surface de la cannelure ou de la cavité, aux déplacements u effectifs, et à varier avec x de manière que la dilatation ∂_x y soit régie, comme dans la tige, par la formule (18). Ce cas sera ainsi ramené à celui d'une tige dont l'axe est situé dans l'espace occupé par sa matière, et on pourra lui appliquer les considérations précédentes : par exemple, la suite des points matériels fictifs qui coïncidait primitivement avec l'axe géométrique de la tige pourra être regardée, après les déplacements, comme son axe matériel.

Nous chercherons d'abord le moyen de calculer u', v', w' pour tous les points du tronçon considéré, afin de construire en particulier la section normale qui coïncidait primitivement avec le plan des $x'y'$ et l'élément de l'axe de la tige (dont nous appellerons O', O'_1 les extrémités) qui mesurait la longueur ds' du tronçon; puis nous verrons comment on pourrait fixer, en partant de la seconde extrémité O'_1 de cet élément prise pour origine, les nouveaux axes des x', y', z' relatifs au tronçon suivant, de manière à rattacher chaque tronçon au précédent, et à déterminer ainsi la forme complète de la tige, quelque grandes que soient les déformations totales qu'elle a subies.

Il est évident que les axes des x', y', z' spéciaux aux divers tronçons étaient, antérieurement aux déplacements observés, sensiblement parallèles aux axes des x, y, z considérés aux paragraphes précédents. Il sera donc permis, pour la petite portion de la tige dont les déplace-

ments u, v, w par rapport aux axes des x, y, z sont très-petits, et suivent par suite les lois établies dans ces paragraphes, de remplacer, dans les formules qui expriment ces lois, ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, par $\frac{du'}{dx'}$, $\frac{dv'}{dy'}$, $\frac{dw'}{dz'}$, $\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}$, $\frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'}$, $\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}$.

Nous supposerons que la section normale dont la distance primitive à l'origine de la tige est s' soit justement celle dont nous avons appelé au paragraphe précédent x_0 la distance primitive à l'origine des coordonnées x, y, z. En comparant le système des x', y', z' à celui des x, y, z, il est clair qu'on aura, pour tous les points du tronçon, $x' = x - x_0$, $y' = y$, $z' = z$, et que u', v', w' ne pourront différer de u, v, w, si ce n'est dans les termes qui correspondent à un petit mouvement d'ensemble des axes des x, y, z par rapport au tronçon. Les valeurs de v', w' seront donc fournies par les formules (25) dans lesquelles il faudra remplacer x par $x_0 + x'$, y par y', z par z', et où les fonctions $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_1$ se détermineront en exprimant que $v' = w' = 0$ et $\frac{dv'}{dx} = \frac{dw'}{dx} = 0$ pour $x' = y' = z' = 0$. Sauf erreur infiniment petite de l'ordre de x'^2, on aura, par suite,

(51)
$$\left\{\begin{aligned} v' &= -\mathcal{C}z' + \tfrac{1}{2}\left[\eta''\mathcal{A}z' + (\eta'\mathcal{B}_1 + \eta''\mathcal{B})z'^2\right] \\ &\quad - \eta(\mathcal{A}y' + \mathcal{B}y'z' + \tfrac{1}{2}\mathcal{B}_1 y'^2), \\ w' &= \mathcal{C}y' + \tfrac{1}{2}\left[\eta''\mathcal{A}y' + (\eta\mathcal{B} + \eta''\mathcal{B}_1)y'^2\right] \\ &\quad - \eta'(\mathcal{A}z' + \mathcal{B}_1 y'z' + \tfrac{1}{2}\mathcal{B}z'^2). \end{aligned}\right.$$

Les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ pour x' très-petit sont, d'après (33) $\Big[$en négligeant, comme il a été dit après les formules (41), $\int_\sigma \rho z \mathrm{X}\, d\sigma$, $\int_\sigma \rho y \mathrm{X}\, d\sigma\Big]$,

(52)
$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathcal{N} - x'\int_\sigma \rho \mathrm{X}\, d\sigma\right), \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{\mathcal{E}\mathrm{I}}(\mathcal{M} + x'\mathcal{F}), \\ \mathcal{B}_1 &= \frac{1}{\mathcal{E}\mathrm{I}'}(-\mathcal{M}_1 + x'\mathcal{F}_1); \end{aligned}\right.$$

on les portera dans (51) et dans l'expression de ∂_x,

$$\partial_x = \mathcal{A} + \mathcal{B} z' + \mathcal{B}_1 y'. \tag{52 bis}$$

Le coefficient $\mathcal{C}$, qui entre encore dans les expressions de v', w', se calcule aisément : sa dérivée par rapport à x a été désignée, aux paragraphes précédents, par K, et déterminée, sur la section $x = x_0$, en même temps que T_2, T_3. Sauf erreur de l'ordre x'^2, $\mathcal{C}$ est donc égal à Kx', augmenté de sa valeur pour $x' = 0$; or celle-ci, devant être telle que, pour $x' = y' = z' = 0$, on ait, d'après (50), $\frac{dw'}{dy'} = 0$, n'est autre que celle de $-\frac{1}{2}\eta''\mathcal{A}$ pour $x' = 0$, et vaut $-\frac{\eta''\mathfrak{M}}{2\mathfrak{E}\sigma}\cdot$ On a donc

$$\mathcal{C} = -\frac{\eta''\mathfrak{M}}{2\mathfrak{E}\sigma} + Kx'. \tag{53}$$

Les formules (51), avec les valeurs (52) et (53) de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}$, fourniront v' et w', non-seulement pour $x' = 0$, c'est-à-dire sur la première base du tronçon, mais encore, sauf erreur de l'ordre x'^2, dans tout l'intérieur du tronçon. On pourra donc en déduire les valeurs de $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$ pour $x' = 0$. Ces valeurs, portées dans les identités

$$\frac{du'}{dy'} = g_{xy} - \frac{dv'}{dx'}, \quad \frac{du'}{dz'} = g_{zx} - \frac{dw'}{dx'}, \tag{53 bis}$$

permettront ensuite, en intégrant celles-ci après les avoir respectivement multipliées par dy', dz' et ajoutées, de déterminer u' sur toute l'étendue de la première base du tronçon, puisqu'on y suppose connues T_3, T_2, et, par suite, g_{xy}, g_{zx}. La constante introduite par l'intégration se déterminera en exprimant que $u' = 0$ pour $y' = z' = 0$. Si même T_3, T_2 ont été déterminés, non pas au moyen des équations de (43) à (47), qui les fournissent directement, mais par les équations (28), (29) et la dernière (33), qui ne les donnent qu'en calculant préalablement u, aucune nouvelle intégration ne sera nécessaire; car il suffira, pour rendre u égal à u', de déterminer les constantes introduites par l'intégration de manière à vérifier les relations (50). En remplaçant enfin, dans (52 *bis*), ∂_x par $\frac{du'}{dx'}$, multipliant par dx' et in-

remplacés par les valeurs primitives de ces cosinus, et les dérivées $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dy'}$, qui sont nulles, d'après (50), au point O', par les valeurs approchées qu'elles ont en O'_1, savoir $\frac{d^2v'}{dx'^2}ds'$, $\frac{d^2w'}{dx'^2}ds'$, $\frac{d^2w'}{dx'\,dy'}ds'$. On trouve ainsi, en substituant 1, $\frac{\cos\delta_0}{R_0}ds'$, $\frac{\sin\delta_0}{R_0}ds'$ à dx', dy', dz' et négligeant les produits des dérivées de v', w' par la courbure $\frac{1}{R_0}$ supposée assez petite, que le nouvel axe des x', c'est-à-dire l'élément de l'axe de la tige qui part de O'_1, fait avec les x', y', z' du précédent tronçon des angles ayant pour cosinus 1, $\left(\frac{\cos\delta_0}{R_0}+\frac{d^2v'}{dx'^2}\right)ds'$, $\left(\frac{\sin\delta_0}{R_0}+\frac{d^2w'}{dx'^2}\right)ds'$. Si l'on substitue au contraire $-\frac{\cos\delta_0}{R_0}ds'$, 1, $K_0\,ds'$ à dx', dy', dz', on trouve que les cosinus pareils, pour l'élément rectiligne qui coïncidait primitivement avec le nouvel axe des y', sont $\frac{du'}{dy'}$, 1, $\left(K_0+\frac{d^2w'}{dx'\,dy'}\right)ds'$. Donc le nouvel axe des z', perpendiculaire à cette direction et au nouvel axe de x', aura les cosinus de ses angles avec les x', y', z' du précédent tronçon, égaux à $-\left(\frac{\sin\delta_0}{R_0}+\frac{d^2v'}{dx'^2}\right)ds'$, $-\left(K_0+\frac{d^2w'}{dx'\,dy'}\right)ds'$, 1. Enfin, les cosinus pareils, pour le nouvel axe des y', qui est normal aux deux autres, seront $-\left(\frac{\cos\delta_0}{R_0}+\frac{d^2w'}{dx'^2}\right)ds'$, 1, $\left(K_0+\frac{d^2w'}{dx'\,dy'}\right)ds'$. Dans toutes ces expressions, $\frac{d^2v'}{dx'^2}$, $\frac{d^2w'}{dx'^2}$ peuvent être remplacés identiquement par $\frac{dg_{xy}}{dx'}-\frac{d\partial_x}{dy'}$, $\frac{dg_{zx}}{dx'}-\frac{d\partial_x}{dz'}$, ou bien, d'après (52 *bis*) et (52), par $\frac{dg_{xy}}{dx'}+\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}$, $\frac{dg_{zx}}{dx'}-\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}$; les relations (51), (52) et (53) donneront aussi, pour $x'=y'=z'=0$,

$$\frac{d^2w'}{dx'\,dy'}=K-\frac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\,d\sigma,$$

en supposant, pour abréger, η'' et $\mathcal{E}\sigma$ constants.

Les cosinus des angles que font, avec les axes des x', y', z' menés

par O', les nouveaux axes pareils menés par O'_1 sont donc

$$(54)\quad\begin{cases} 1,\quad \left(\dfrac{\cos\delta_0}{R_0}+\dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}+\dfrac{dg_{xy}}{dx'}\right)ds',\qquad \left(\dfrac{\sin\delta_0}{R_0}-\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}+\dfrac{dg_{zx}}{dx'}\right)ds',\\ \text{pour le nouvel axe des } x';\\ -\left(\dfrac{\cos\delta_0}{R_0}+\dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}+\dfrac{dg_{xy}}{dx'}\right)ds',\quad 1,\quad \left(K_0+K-\dfrac{n''}{2\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X\,d\sigma\right)ds',\\ \text{pour le nouvel axe des } y';\\ -\left(\dfrac{\sin\delta_0}{R_0}-\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}+\dfrac{dg_{zx}}{dx'}\right)ds',\quad -\left(K_0+K-\dfrac{n''}{2\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X\,d\sigma\right)ds',\quad 1,\\ \text{pour celui des } z', \end{cases}$$

formules dans lesquelles des dérivées $\frac{dg_{xy}}{dx'}$, $\frac{dg_{zx}}{dx'}$ sont prises pour $x'=y'=z'=0$.

Ces formules, ainsi que les expressions (51) de v', w', peuvent être simplifiées en observant que les dimensions des sections σ sont très-petites. De là il résulte d'abord qu'on peut négliger les termes $\frac{dg_{zx}}{dx'}$, $\frac{dg_{xy}}{dx'}$. En effet, d'après les relations (9), g_{zx}, g_{xy}, et, par suite, leurs dérivées en x' sont généralement du même ordre de grandeur que GT_2, $G'T_3$, et aussi, en général, que $\frac{1}{\mathcal{E}}T_2$, $\frac{1}{\mathcal{E}}T_3$. Or, à cause des deux dernières relations (32), qui, pour $x'=0$, sont

$$\int_\sigma T_2\,d\sigma=\mathcal{F},\quad \int_\sigma T_3\,d\sigma=\mathcal{F}_1,$$

T_2, T_3 se composent : 1° d'un terme égal à leur valeur moyenne $\frac{\mathcal{F}}{\sigma}$ ou $\frac{\mathcal{F}_1}{\sigma}$, terme négligeable en comparaison de $\frac{\mathfrak{M}}{I}$ ou de $\frac{-\mathfrak{M}_1}{I'}$, car $\mathfrak{M}$, $-\mathfrak{M}_1$ sont de l'ordre de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, tandis que les moments d'inertie I, I' de la section σ, sont incomparablement plus petits que σ; 2° d'un autre terme variable d'un point à l'autre de la section et partout très-petit de l'ordre des dimensions de σ, puisque, ayant sa valeur moyenne nulle, ce terme change de signe et s'annule en certains points de la section. Ainsi les cosinus des angles que font avec les axes des x', y', z'

d'un tronçon les axes pareils du tronçon suivant sont à fort peu près

$$(55)\quad \left\{\begin{array}{lll} 1, & \left(\dfrac{\cos\delta_0}{R_0}+\dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}\right)ds', & \left(\dfrac{\sin\delta_0}{R_0}-\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}\right)ds'. \\ \multicolumn{3}{l}{\text{pour le nouvel axe des } x';} \\ -\left(\dfrac{\cos\delta_0}{R_0}+\dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}\right)ds', & 1. & \left(K_0+K-\dfrac{\eta'}{2\mathcal{E}\sigma_0}\displaystyle\int_\sigma \rho\, X\, d\sigma\right)ds', \\ \multicolumn{3}{l}{\text{pour celui des } y';} \\ -\left(\dfrac{\sin\delta_0}{R_0}-\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}\right)ds', & -\left(K_0+K-\dfrac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma_0}\displaystyle\int_\sigma \rho\, X\, d\sigma\right)ds', & 1, \\ \multicolumn{3}{l}{\text{pour celui des } z.} \end{array}\right.$$

Les valeurs moyennes, sur toute l'étendue d'une section, de GT_2, $G'T_3$, et, par suite, de g_{zx}, g_{xy}, étant du même ordre que $\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}\sigma}$ ou $\frac{-\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}\sigma}$, sont, par suite, négligeables, non-seulement devant $\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}$ ou $\frac{-\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}$, mais encore devant $\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}z'$ ou $\frac{-\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}y'$, car I, I' sont de l'ordre de $\sigma z'^2$, $\sigma y'^2$. Donc les valeurs moyennes de g_{zx}, g_{xy} pourront être supposées nulles en comparaison des déformations ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, qui sont au moins de l'ordre de $\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}z'-\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}y'$. Par suite, *si* g_{zx}, g_{xy} *ne sont nulle part d'un ordre de grandeur supérieur à celui de leurs valeurs moyennes, ce qui arrive dans le cas d'une tige fléchie, on peut* supposer partout nuls ces glissements, ou, ce qui revient au même, *admettre que les sections primitivement perpendiculaires aux fibres longitudinales de la tige sont encore, après les déformations, normales à ces fibres.*

La première ligne des relations (55) exprime une loi intéressante, consistant en ce que *l'inclinaison, sur chacun des deux axes principaux d'une section normale, de la tangente menée à l'axe de la tige en un point de cet axe distant de ds' de la section considérée, est égale à sa valeur primitive* $\frac{\cos\delta_0}{R_0}ds'$ *ou* $\frac{\sin\delta_0}{R_0}ds'$, *augmentée du produit de ds' par le rapport* $\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}$ *ou* $\frac{-\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}$. Si l'on appelle R le rayon de courbure, en O, de l'axe de la tige après les déplacements, δ l'angle de ce rayon

avec l'axe des y', des formules de géométrie qui ont été déjà employées pour obtenir la première ligne des relations (54) donneront

$$\frac{\cos\delta}{R} = \frac{\cos\delta_0}{R_0} + \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}, \quad \frac{\sin\delta}{R} = \frac{\sin\delta_0}{R_0} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I};$$

d'où

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{\cos\delta_0}{R_0} + \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}\right)^2 + \left(\frac{\sin\delta_0}{R_0} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}\right)^2}.$$

Supposons, en particulier, que R_0 soit infini, et nous aurons le théorème suivant, bien connu :

Pour obtenir la courbure, en un point donné, de la fibre moyenne d'une tige primitivement rectiligne, il faut construire les deux axes d'inertie principaux, relatifs au centre de gravité, de la section normale menée par ce point, en supposant à cette section une densité superficielle égale, en chacun de ses points, au coefficient d'élasticité de la fibre qui y passe, prendre ensuite les deux moments totaux, par rapport à ces axes, de toutes les forces extérieures, y compris celles d'inertie dans le cas du mouvement, qui agissent sur la partie de la tige située au delà de cette section, et extraire la racine carrée de la somme des carrés des rapports de chacun de ces deux moments au moment d'inertie correspondant de la section.

Il n'est plus permis de négliger g_{zx}, g_{xy} dans le cas d'une tige simplement tordue. Alors les moments $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ sont nuls, ainsi que les actions $\mathfrak{N}$, X et les déformations ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz} ; il ne subsiste que les glissements g_{zx}, g_{xy} et les forces T_2, T_3, dont les valeurs moyennes sont nulles, mais qui n'en produisent pas moins le phénomène de la torsion.

La petitesse de y', z' permet encore de négliger, dans les formules (51), les termes qui contiennent leurs carrés ou leurs produits, ce qui, en substituant à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ leurs valeurs (52), donne

$$(51\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} v' &= \left[-Kx' + \frac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\left(2\mathfrak{N} - x'\int_\sigma \rho X\,d\sigma\right)\right]z' \\ &\qquad - \frac{\eta}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathfrak{N} - x'\int_\sigma \rho X\,d\sigma\right)y', \\ w' &= \left(Kx' - \frac{\eta''x'}{2\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\,d\sigma\right)y' - \frac{\eta'}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathfrak{N} - x'\int_\sigma \rho X\,d\sigma\right)z'. \end{aligned}\right.$$

Les formules (55), étant basées, comme (54), sur l'hypothèse de la petitesse des sections normales, sont peut-être aussi exactes que celles-ci plus compliquées, lorsque la tige considérée est imparfaitement cylindrique ou soumise dans son intérieur et vers ses extrémités à des actions appliquées d'une manière quelconque. Toutefois ces formules plus compliquées peuvent avoir aussi leur utilité; car elles sont vraies, quelque grandes que soient les sections normales des tiges, lorsque celles-ci sont bien cylindriques et que des actions extérieures sont appliquées à leur intérieur ou sur leurs bases de manière à vérifier exactement les hypothèses $N_2 = N_3 = T_1 = 0$. L'analyse du paragraphe actuel et du précédent ne repose en effet que sur ces hypothèses, dont nous avons montré la vérité approximative, à une distance finie des extrémités des tiges, pour tout mode d'application des forces, pourvu que les sections soient assez petites.

§ VII. — *Théorie de M. Kirchoff.*

M. Kirchoff, dans son *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement d'une tige élastique infiniment mince* (*Journal de Crelle*, t. LVI, p. 285), a exposé une autre théorie basée sur des considérations de pure cinématique, et qui conduit aux résultats approchés du paragraphe précédent toutes les fois que la force X n'est pas très-grande. Je vais exposer cette théorie, qui ne me semble rigoureuse qu'à la condition d'être compliquée d'une hypothèse dont la vérité ne me paraît pas certaine *à priori*, et qui, vérifiée en général, revient alors à l'hypothèse, faite par M. de Saint-Venant, de la nullité des forces N_2, N_3, T_1.

M. Kirchoff divise la tige, par des sections normales très-voisines, en tronçons d'une longueur comparable aux dimensions de leurs bases, et il rapporte chaque tronçon, avant et après les déplacements, aux mêmes axes des x', y', z' que j'ai adoptés, après lui, au paragraphe précédent, mais en supposant mes tronçons infiniment courts, alors même que les sections seraient seulement très-petites. On peut supposer que tout point O' de l'axe de la tige soit l'origine d'un système d'axes des x', y', z', caractérisé par la distance primitive s' de O' à l'origine de la tige, et l'on peut appeler x', y', z' les coordonnées pri-

mitives, et u', v', w' les déplacements, par rapport à un quelconque de ces systèmes d'axes, d'une molécule M très-voisine de leur origine O'. Les déplacements u', v', w' seront ainsi des fonctions continues des quatre variables indépendantes x', y', z', s'; car ils varieront, soit lorsque, le système des axes coordonnés et par suite s' ne changeant pas, on fera seulement varier x', y', z', soit lorsque, x', y', z' restant les mêmes, on fera varier s' en considérant divers points situés pareillement par rapport à des axes différents.

M. Kirchoff considère une tige primitivement rectiligne et non torse (c'est-à-dire qu'il suppose $R_0 = \infty$, $K_0 = 0$), cas auquel il ramène celui d'une tige courbe, et il démontre qu'il existe certaines relations entre les dérivées partielles $\frac{du'}{ds'}$ et $\frac{du'}{dx'}$, $\frac{dv'}{ds'}$ et $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{ds'}$ et $\frac{dw'}{dx'}$. J'établirai plus simplement ces relations en exprimant que la molécule M occupe la même position dans l'espace, soit qu'on la rapporte au système d'axes dont l'origine O' est à une distance s' de l'origine de la tige, soit qu'on la rapporte à un autre système ayant son origine O'_1 très-voisine de O', et à une distance de l'origine de la tige primitivement égale à $s' + ds'$. Par rapport à ce nouveau système d'axes, pour lequel s' s'est changé en $s' + ds'$, les coordonnées primitives de M sont évidemment $x' - ds'$, y', z', tandis qu'elles étaient x', y', z' par rapport à celui dont l'origine est en O'. Par suite, les déplacements de M, qui étaient u', v', w' pour celui-ci, seront

$$u' - \frac{du'}{dx'}ds' + \frac{du'}{ds'}ds', \quad v' - \frac{dv'}{dx'}ds' + \frac{dv'}{ds'}ds', \quad w' - \frac{dw'}{dx'}ds' + \frac{dw'}{ds'}ds',$$

dans le second système, et les coordonnées de M, après les déformations étudiées, se trouveront devenues :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x' + u', \quad y' + v', \quad z' + w' & \text{par rapport au premier système;} \\ \left. \begin{array}{l} x' + u' - \left(1 + \frac{du'}{dx'} - \frac{du'}{ds'}\right) ds', \\ y' + v' - \left(\frac{dv'}{dx'} - \frac{dv'}{ds'}\right) ds', \\ z' + w' - \left(\frac{dw'}{dx'} - \frac{dw'}{ds'}\right) ds' \end{array} \right\} & \text{par rapport au second.} \end{array} \right.$$

Or, on sait qu'en appelant $\mathfrak{p}\,ds'$, $\mathfrak{q}\,ds'$, $\mathfrak{r}\,ds'$ trois certaines quantités infiniment petites, les cosinus des angles que font les seconds axes, dont l'origine est en O'_1, avec les premiers, dont l'origine est en O', sont :

$$(55\ bis)\quad \left\{\begin{array}{llll} 1, & \mathfrak{r}\,ds', & -\mathfrak{q}\,ds' & \text{pour le nouvel axe des } x'\,; \\ -\mathfrak{r}\,ds', & 1, & \mathfrak{p}\,ds' & \text{pour le nouvel axe des } y'\,; \\ \mathfrak{q}\,ds', & -\mathfrak{p}\,ds', & 1 & \text{pour celui des } z'. \end{array}\right.$$

De plus, d'après les formules ordinaires de transformation, la coordonnée, suivant un axe du premier système, d'un point quelconque de l'espace, est égale à la coordonnée pareille de la seconde origine O'_1, augmentée des trois produits des coordonnées du même point dans le second système par les cosinus respectifs des angles que font les axes de ce système avec l'axe considéré du premier. Si l'on appelle ∂_0 la dilatation de $O'O'_1$, c'est-à-dire si l'on suppose, après les déplacements,

$$O'O'_1 = (1 + \partial_0)\,ds',$$

les coordonnées de O'_1 seront $(1+\partial_0)\,ds'$, o, o, et l'application de la règle précédente au point M, dont les coordonnées dans les deux systèmes sont égales aux expressions (56), donnera les trois relations cherchées

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du'}{dx'} &= \partial_0 + \mathfrak{q}(z' + w') - \mathfrak{r}(y' + v') + \frac{du'}{ds'}, \\ \frac{dv'}{dx'} &= \qquad\ \ \mathfrak{r}(x' + u') - \mathfrak{p}(z' + w') + \frac{dv'}{ds'}, \\ \frac{dw'}{dx'} &= \qquad\ \ \mathfrak{p}(y' + v') - \mathfrak{q}(x' + u') + \frac{dw'}{ds'}. \end{aligned}\right.$$

Les coordonnées $x' + u'$, $y' + v'$, $z' + w'$ peuvent être réduites, dans ces formules, à leurs parties constantes x', y', z' ; car, x', y', z' étant en général de l'ordre de grandeur des dimensions d'un tronçon de la tige, et ce tronçon étant rapporté à des axes qui le suivent dans tous ses mouvements d'ensemble, u', v', w' ne pourraient devenir comparables à x', y', z' que si les déformations ∂, g cessaient d'être très-

petites. Les relations (57) peuvent donc être réduites à

$$(57\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du'}{dx'} &= \partial_0 + \mathfrak{q} z' - \mathfrak{r} y' + \frac{du'}{ds'},\\ \frac{dv'}{dx'} &= \qquad \mathfrak{r} x' - \mathfrak{p} z' + \frac{dv'}{ds'},\\ \frac{dw'}{dx'} &= \qquad \mathfrak{p} y' - \mathfrak{q} x' + \frac{dw'}{ds'}. \end{aligned}\right.$$

Observons que les fonctions u', v', w', $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dy'}$ sont généralement très-petites par rapport à leurs dérivées premières en x', y', z'; car, d'après (50), elles s'annulent à l'origine O', ou pour $x'=y'=z'=0$, et ne peuvent être, près de cette origine, que de l'ordre de leurs dérivées premières multipliées par les coordonnées x', y', z'. Cela ayant lieu quel que soit s', les dérivées par rapport à s' de u', v', w', $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dy'}$ devront être généralement du même ordre que ces fonctions elles-mêmes, et seront peut-être comparables aux termes $\mathfrak{q} z'$, $-\mathfrak{r} y'$, $\mathfrak{r} x'$,... [*]. On n'a donc pas, *à priori*, le droit de négliger, dans les formules (57 *bis*), les termes très-petits $\frac{du'}{ds'}$, $\frac{dv'}{ds'}$, $\frac{dw'}{ds'}$, à moins de négliger en même temps les termes $\mathfrak{q} z'$, $-\mathfrak{r} y'$, $\mathfrak{r} x'$,..., qui paraissent du même ordre de grandeur, et, par suite, de renoncer à l'étude de la flexion et de la torsion, représentées principalement par ces termes. Or M. Kirchoff, se basant simplement sur la petitesse des termes $\frac{du'}{ds'}$, $\frac{dv'}{ds'}$, $\frac{dw'}{ds'}$, croit pouvoir les supprimer des formules (57 *bis*) en gardant tous les autres; ce qui le conduit à une théorie simple de la flexion et de la torsion des tiges infiniment minces.

---

[*] Toutefois l'expérience montre que la torsion $\mathfrak{p}$ et la flexion $\sqrt{\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2}$ peuvent atteindre des valeurs finies, dans les tiges très-minces simplement fléchies ou tordues, sans que les limites d'élasticité de ces tiges soient dépassées, c'est-à-dire sans que les déformations ∂, g, qui sont comparables aux dérivées premières de u', v', w' en x', y' z', cessent d'être très-petites. On peut donc, en s'appuyant sur ce fait, supposer, dans l'étude de la flexion et de la torsion simples, les ∂, g très-petits en comparaison de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, et négliger par suite (comme le fait M. Kirchoff sans en donner cette raison) les dérivées premières en s' de u', v', w' devant les termes $\mathfrak{q} z'$, $\mathfrak{r} y'$.... Mais une théorie ne doit pas s'appuyer sur un fait dont elle peut se passer.

Voyons dans quels cas les formules obtenues au paragraphe précédent sont d'accord avec les relations (57 *bis*) ainsi simplifiées. Les relations (51 *bis*) donnent, pour $x' = 0$,

$$\frac{dv'}{dx'} = \left(-K - \frac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\, d\sigma\right) z' + \left(\frac{\eta}{\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\, d\sigma\right) y',$$

$$\frac{dw'}{dx'} = \left(\ K - \frac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\, d\sigma\right) y' + \left(\frac{\eta'}{\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\, d\sigma\right) z'.$$

Pour x' très-petit de l'ordre de y', z', il faut ajouter aux seconds membres de ces formules de petits accroissements, sensiblement égaux à $\frac{d^2v'}{dx'^2}x'$, $\frac{d^2w'}{dx'^2}x'$. Or on trouve aisément, comme au paragraphe précédent,

$$\frac{d^2v'}{dx'^2} = \frac{dg_{xy}}{dx} - \frac{d\partial_x}{dy'} = \frac{dg_{xy}}{dx} + \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'} = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'},$$

$$\frac{d^2w'}{dx'^2} = \frac{dg_{zx}}{dx} - \frac{d\partial_x}{dz'} = \frac{dg_{zx}}{dx} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I} = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}.$$

Il résulte donc de l'analyse du paragraphe précédent, en écrivant d'abord, d'après (52 *bis*) et (52), l'expression de ∂_x ou $\frac{du'}{dx'}$:

$$(58)\quad \begin{cases} \dfrac{du'}{dx'} = \dfrac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathfrak{T} - x'\displaystyle\int_\sigma \rho X\, d\sigma\right) + \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I} z' - \dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'} y', \\ \dfrac{dv'}{dx'} = \left(-K - \dfrac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X\, d\sigma\right) z' + \left(\dfrac{\eta}{\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X\, d\sigma\right) y' + \dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'} x', \\ \dfrac{dw'}{dx'} = \left(\ K - \dfrac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X\, d\sigma\right) y' + \left(\dfrac{\eta'}{\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X\, d\sigma\right) z' - \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I} x'. \end{cases}$$

Si l'on observe que, d'après les expressions (55) et (55 *bis*) comparées (et puisqu'on suppose $K_0 = 0$, $R_0 = \infty$),

$$(55\ ter)\qquad \mathfrak{p} = K - \frac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\, d\sigma, \quad \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}, \quad \mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'},$$

et que ∂_0 est la valeur $\frac{\mathfrak{T}}{\mathcal{E}\sigma}$ de ∂_x pour $x' = y' = z' = 0$, l'identification des formules (57 *bis*) et (58) donnera

$$(59)\quad \frac{du'}{ds'} = -\frac{x'}{\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\, d\sigma, \quad \frac{dv'}{ds'} = \frac{-\eta''z' + \eta y'}{\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\, d\sigma, \quad \frac{dw'}{ds'} = \frac{\eta' z'}{\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\, d\sigma.$$

Ces valeurs de $\frac{du'}{ds'}, \frac{dv'}{ds'}, \frac{dw'}{ds'}$ ne sont pas toujours très-petites par rapport à $q z', -r y', \ldots$; elles sont même beaucoup plus grandes dans le cas où la tige est, par exemple, verticale et simplement soumise à son propre poids, ou quand elle vibre longitudinalement. Mais, en général, l'intégrale $\int_\sigma \rho X d\sigma$ est au plus de l'ordre des moments $\mathfrak{M}$ ou $\mathfrak{M}_1$, et, à cause de la petitesse des rapports $\frac{I}{\sigma}, \frac{I'}{\sigma}$, les dérivées en s' de u', v', w' sont négligeables devant $q z', -r y', \ldots$: l'hypothèse de M. Kirchoff est donc alors réalisée.

Les dérivées $\frac{du'}{ds'}, \frac{dv'}{ds'}, \frac{dw'}{ds'}$ caractérisent évidemment les variations que subissent la forme et les dimensions de divers tronçons primitivement égaux, lorsqu'on passe de l'un de ces tronçons aux suivants. L'hypothèse de M. Kirchoff, qui annule ces dérivées, revient donc à dire que des tronçons successifs, primitivement égaux, restent égaux après les déplacements; ou que, du moins, les petites variations de forme ou de grandeur observées lorsqu'on passe de l'un à l'autre peuvent être négligées dans les formules fondamentales (57 *bis*), même lorsqu'on conserve les autres petits termes de ces formules.

§ VIII. — *Décomposition de l'action totale exercée sur un tronçon de la tige en six actions élémentaires, qui produisent respectivement une extension ou une contraction, deux flexions égales, deux flexions inégales et une torsion.*

Considérons un tronçon assez court pour que sa forme soit toujours à fort peu près cylindrique, et pour que les quantités $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1$, M, $\int_\sigma \rho X d\sigma$, relatives à ses diverses sections normales, aient sensiblement les mêmes valeurs dans toute son étendue. Ce tronçon pourra être de longueur finie si son axe était primitivement rectiligne, et si la force extérieure appliquée à l'unité de masse est parallèle à l'axe de la tige et telle que l'expression $\int_\sigma \rho X d\sigma$ soit indépendante de x; car alors les composantes $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1$ suivant les y et les z, ainsi que le moment M autour de l'axe des x, des actions exercées sur toute la partie de la tige qui est

au delà d'une section quelconque du tronçon considéré, se réduiront aux composantes et au moment pareils des forces appliquées aux points de la tige qui sont situés au delà du tronçon. Admettons que tous les coefficients d'élasticité E, η, η', η'', G, G', H, H' soient indépendants de x. Nous rapporterons ce tronçon à un système d'axes coordonnés des x', y', z' entièrement pareils à ceux des deux paragraphes précédents; mais, afin de simplifier certaines formules, nous prendrons l'origine au centre de gravité de la seconde base du tronçon, de manière à avoir $x' < 0$ dans l'intérieur du tronçon et $x' = 0$ (ou $x = x_0$) sur cette base même. Les relations (33) deviendront

$$(59\,bis)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \dfrac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathcal{K} - x'\displaystyle\int_\sigma \rho\,X\,d\sigma\right), \\[2mm] \mathcal{B} = \dfrac{\mathfrak{M} + \mathcal{F}x'}{\mathcal{E}I}, \quad \mathcal{B}_1 = \dfrac{-\mathfrak{M}_1 + \mathcal{F}_1 x'}{\mathcal{E}I'}, \\[2mm] M = \displaystyle\int_\sigma (y'T_2 - z'T_3)\,d\sigma. \end{cases}$$

Nous supposerons successivement : 1° que les deux composantes $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$ suivant les y et suivant les z, et les moments M, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ par rapport aux trois axes, des forces appliquées à la section $x' = 0$, soient égaux à zéro, mais que les actions X, dans tout l'intérieur du tronçon, et $\mathcal{K}$, appliquée à la seconde base parallèlement à l'axe des x', conservent leurs valeurs données; 2° que chacune des quantités $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, M ait sa valeur donnée, toutes les autres étant nulles, ainsi que $\mathcal{K}$ et X. Nous obtiendrons ainsi six états élémentaires du tronçon, à chacun desquels correspondront, pour les six déformations ∂, g, et pour les déplacements u', v', w', certaines valeurs dont les sommes respectives donneront les vraies valeurs de ces déformations et de ces déplacements.

1° Si, d'abord, la force exercée sur la seconde base du tronçon se réduit à la traction normale $\mathcal{K}$, il résultera, des relations (18), (22) et (59 *bis*),

$$\partial_x = \frac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathcal{K} - x'\int_\sigma \rho\,X\,d\sigma\right), \quad \partial_y = -\eta\partial_x, \quad \partial_z = -\eta'\partial_x, \quad g_{yz} = \eta''\partial_x.$$

Les formules (28), (29), (59 *bis*) donneront de plus

$$T_2 = 0, \quad T_3 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad g_{zx} = 0, \quad g_{xy} = 0.$$

Les glissements g_{zx}, g_{xy} étant nuls, les fibres longitudinales restent perpendiculaires aux sections primitivement planes qui leur étaient normales avant les déplacements. Il suit de là qu'il n'y a pas de torsion de ces fibres, c'est-à-dire que celles qui entourent l'une d'entre elles ne se sont pas inclinées, toutes en hélices de même sens, autour de cette fibre moyenne; en effet, si nous construisons, dans une section normale quelconque, les deux lignes de courbure qui partent du pied de la fibre moyenne considérée, celle-ci sera restée dans un même plan avec chacune de ses deux voisines prises sur ces deux lignes de courbure. De plus, les longueurs des fibres ayant conservé entre elles les mêmes rapports, puisque les dilatations ∂_x ne dépendent pas de y', z', deux sections normales, infiniment voisines, sont inclinées l'une sur l'autre de la même manière qu'avant les déplacements, et il n'y a pas de flexion.

Les forces X, $\mathfrak{X}$ ne produisent donc ni torsion, ni flexion, mais simplement des dilatations ou des contractions longitudinales accompagnées de contractions ou de dilatations latérales, et aussi, lorsque η'' n'est pas nul ou que la contexture du milieu n'a pas d'autres plans de symétrie que les sections normales, de glissements transversaux g_{yz}.

2° et 3° Supposons actuellement que X, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, M soient égaux à zéro, et qu'un des deux moments $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ subsiste seul, ou, ce qui revient au même, que la seconde base du tronçon ne soit soumise qu'à des forces équivalentes à un couple ayant son axe parallèle à celui des y' ou à celui des z'. Faisons, par exemple, $\mathfrak{M}_1 = 0$. Les formules (28), (29) et (59 *bis*) donneront $T_2 = 0$, $T_3 = 0$. Il en résulte, comme précédemment, $g_{zx} = 0$, $g_{xy} = 0$, c'est-à-dire que les fibres longitudinales seront restées perpendiculaires aux sections normales, et qu'il n'y aura pas de torsion. D'ailleurs, comme on aura

$$(60)\qquad \partial_x = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{E}I} z', \quad \partial_y = -\eta \partial_x, \quad \partial_z = -\eta' \partial_x, \quad g_{yz} = \eta'' \partial_x,$$

les dilatations ∂ et le glissement g_{yz} seront nuls pour $z' = 0$, c'est-à-dire sur la fibre centrale, et très-petits de l'ordre de z' sur les autres fibres; d'où il suit que la tige ne sera soumise, en somme, à aucune dilatation, ni à aucun glissement bien sensibles.

Les sections normales seront planes après les déplacements comme

avant. En effet, les fibres longitudinales, restées normales à chacune de ces sections, font avec les axes des angles dont on trouverait facilement, en opérant comme on l'a fait pour établir la première ligne des expressions (54), que les cosinus valent respectivement 1, $\frac{dv'}{dx'} + \frac{\cos\delta_0}{R_0}x'$, $\frac{dw'}{dx'} + \frac{\sin\delta_0}{R_0}x'$. Or ces cosinus sont constants sur toute l'étendue d'une même section normale, c'est-à-dire que leurs dérivées en y', z' sont nulles : on a d'abord $\frac{d^2v'}{dx'\,dy'} = \frac{d\partial_y}{dx'} = 0$, $\frac{d^2w'}{dx'\,dz'} = \frac{d\partial_z}{dx'} = 0$, d'après (60); et, quant aux deux autres dérivées $\frac{d^2v'}{dx'\,dz'}$, $\frac{d^2w'}{dx'\,dy'}$, elles sont nulles aussi, car elles sont égales entre elles, puisque les deux relations $g_{xy} = 0$, $g_{zx} = 0$, différentiées respectivement en z' et y', donnent $\frac{d^2v'}{dx'\,dz'} = -\frac{d^2u'}{dy'\,dz'}$, $\frac{d^2w'}{dx'\,dy'} = -\frac{d^2u'}{dy'\,dz'}$, et, d'autre part, leur somme, exprimée par $\frac{dg_{yz}}{dx'}$, est nulle d'après (60).

Les fibres, restées ainsi parallèles les unes aux autres, se sont dilatées d'après (60), de manière que, de deux sections normales infiniment voisines, la seconde ait tourné, par rapport à la première, autour de son intersection par le plan des $x'y'$, d'un angle égal au produit de $\frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon I}$ par la distance primitive des deux sections.

Ainsi, le couple $\mathfrak{M}$ ne produit sur le tronçon aucune torsion, ni aucune dilatation ou contraction bien sensibles, mais une flexion partout égale, parallèle au plan du couple, et dans laquelle les sections primitivement normales aux fibres restent planes et normales à ces fibres.

Considérons spécialement les cas où la tige était primitivement rectiligne, et calculons les cosinus 1, $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$ des angles que fait alors avec les axes un élément d'une fibre longitudinale. Si l'on différentie, par rapport à x', les relations $g_{xy} = 0$, $g_{zx} = 0$, il vient

$$\frac{d^2v'}{dx'^2} = -\frac{d\partial_x}{dy'} = 0, \quad \frac{d^2w'}{dx'^2} = -\frac{d\partial_x}{dz'} = -\frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon I}.$$

Multiplions par dx' et intégrons à partir de $x' = 0$, en observant que,

sur toute l'étendue de la section $x' = 0$, qui est restée plane, on a $\frac{dv'}{dx'} = 0$, $\frac{dw'}{dx'} = 0$; il viendra

$$\frac{dv'}{dx'} = 0, \quad \frac{dw'}{dx'} = -\frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon \mathrm{I}} x'.$$

Désignons par α, β, γ les angles que fait avec les axes un élément d'une fibre longitudinale, et leurs cosinus auront pour expressions

$$(60\ bis) \qquad \cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = -\frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon \mathrm{I}} x'.$$

Il est clair que, si l'on avait $\mathfrak{M} = 0$, $\mathfrak{M}_1 =$ une quantité donnée, on obtiendrait encore une flexion partout égale, mais parallèle au plan des $x'y'$. L'ensemble des déformations dues à $\mathfrak{M}$ et à $\mathfrak{M}_1$ s'obtiendra en ajoutant les expressions des déplacements u', v', w', dûs à $\mathfrak{M}$ et de ceux qui sont dûs à $\mathfrak{M}_1$. Les glissements totaux g_{zx}, g_{xy} seront donc encore nuls, et les cosinus $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$ seront encore indépendants de y', z', c'est-à-dire que les sections normales seront encore, après les déformations, planes et perpendiculaires aux fibres. Les angles α, β, γ, que feront avec les axes les éléments de ces fibres, auront pour cosinus, dans le cas d'une tige primitivement rectiligne,

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = \frac{\mathfrak{M}_1}{\varepsilon \mathrm{I}'} x', \quad \cos\gamma = -\frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon \mathrm{I}} x'.$$

Le plan auquel restent parallèles les fibres fléchies fait, avec celui des $x'y'$, un angle dont la tangente est

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1} \frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{I}}.$$

Ce plan ne coïncide avec celui du couple résultant des deux couples $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ que lorsque les deux moments d'inertie principaux I, I' de la section sont égaux.

L'angle de deux tangentes infiniment voisines, menées à une même fibre, sera

$$\sqrt{(d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2},$$

ou bien

$$\frac{dx'}{\mathcal{E}}\sqrt{\frac{\mathfrak{M}^2}{I^2}+\frac{\mathfrak{M}_1^2}{I'^2}}.$$

La courbure de la fibre centrale, dont la dilatation ∂_x est nulle, sera le quotient de cet angle par la longueur dx' de l'arc; cette courbure est constante, c'est-à-dire que la tige se courbe en arc de cercle.

4° et 5° Supposons actuellement que X, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, M étant nuls, l'une des deux constantes $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}_1$ ait seule sa valeur donnée, et que l'autre soit égale à zéro. Cela revient à supposer que la seconde base du tronçon supporte seulement des forces dont la résultante passe par son centre de gravité et est parallèle à l'un de ses deux axes principaux d'inertie, celui des z' si $\mathcal{F}_1 = 0$, et celui des y' si $\mathcal{F} = 0$. Faisons, par exemple, $\mathcal{F}_1 = 0$. Il résultera des relations (18), (22), (59 *bis*)

$$\partial_x = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{E}I}x'z', \quad \partial_y = -\eta\partial_x, \quad \partial_z = -\eta'\partial_x, \quad g_{yz} = \eta''\partial_x.$$

Nous avons vu d'ailleurs, après les formules (55), que les glissements g_{zx}, g_{xy} sont assez petits pour pouvoir être négligés. Les fibres longitudinales restent donc sensiblement normales aux sections, et, par suite, il n'y a pas de torsion sensible. Les fibres sont encore, à fort peu près, parallèles les unes aux autres; car on reconnaît, comme précédemment [*voir* après les formules (60)], que les dérivées en y', z' des cosinus $\frac{dv'}{dx'}+\frac{\cos\delta_0}{R_0}x'$, $\frac{dw'}{dx'}+\frac{\sin\delta_0}{R_0}x'$ des angles qu'elles font avec les axes des y' et des z' sont, non pas nulles, mais de l'ordre de y', z', et, par conséquent, négligeables. On peut donc admettre que les sections restent, à fort peu près, planes, mais que, de deux infiniment voisines et primitivement distantes de dx', la seconde tourne, par rapport à la première, autour de son intersection par le plan des $x'y'$, d'un angle égal à $\frac{\mathcal{F}x'}{\mathcal{E}I}dx'$, et par conséquent proportionnel à x'.

La force $\mathcal{F}$ a donc pour effet de produire une flexion inégale, parallèle au plan de $z'x'$.

Considérons spécialement le cas où la tige était primitivement rectiligne, et calculons les cosinus $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$ des angles β, γ que fait alors

avec les axes des y' et des z' un élément de la fibre moyenne. On a

$$\frac{d^2v'}{dx'^2} = \frac{dg_{xy}}{dx'} - \frac{d\partial_z}{dy'} = \frac{dg_{xy}}{dx'}, \quad \frac{d^2w'}{dx'^2} = \frac{dg_{zx}}{dx'} - \frac{d\partial_z}{dz'} = \frac{dg_{zx}}{dx} - \frac{\mathfrak{F}x'}{\mathcal{E}I}.$$

Or, soit à cause de la petitesse de g_{xy}, g_{zx}, soit, même en tenant compte de ces glissements, parce que, $\frac{d\mathfrak{P}}{dx'}$ ou $\frac{\mathfrak{F}}{\mathcal{E}I}$ étant indépendant de x', g_{zx}, g_{xy} le sont aussi d'après (28) et (29), on peut négliger $\frac{dg_{xy}}{dx'}$, $\frac{dg_{zx}}{dx}$, et il vient

$$\frac{d^2v'}{dx'^2} = 0, \quad \frac{d^2w'}{dx'^2} = -\frac{\mathfrak{F}x'}{\mathcal{E}I}.$$

Multiplions par dx' et intégrons à partir de $x' = 0$, en observant que l'on a, pour $x' = 0$ et sur la fibre moyenne, $\frac{dv'}{dx'} = 0$, $\frac{dw'}{dx'} = 0$; nous trouverons, pour les angles α, β, γ d'un élément de cette fibre avec les axes,

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = -\frac{\mathfrak{F}}{2\mathcal{E}I}x'^2.$$

Si l'on veut déterminer les très-petites courbures prises par les sections normales, il faut calculer g_{zx}, g_{xy}, ou bien T_2, T_3. Bornons-nous au cas où la tige est homogène et non tubulaire; les formules (43), (44), (45), (46) donneront pour cela

(61) $$T_2 = -\frac{d\varphi}{dy} - \frac{\mathfrak{F}}{2I}z^2, \quad T_3 = \frac{d\varphi}{dz};$$

(62) $$\left\{\begin{aligned} & G\frac{d^2\varphi}{dy^2} + G'\frac{d^2\varphi}{dz^2} - (H + H')\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + 2K \\ & \qquad + \frac{\mathfrak{F}}{EI}[2\eta y - (\eta'' + H'E)z] = 0, \\ & d\varphi + \frac{\mathfrak{F}}{2I}z^2\,dy = 0 \text{ le long du contour}, \\ & 0 = -\int_\sigma \left(y\frac{d\varphi}{dy} + z\frac{d\varphi}{dz} + \frac{\mathfrak{F}}{2I}z^2 y\right)d\sigma, \end{aligned}\right.$$

auxquelles on peut joindre celle-ci, $\varphi = 0$ en un point de la section, par exemple pour $y = z = 0$.

La constante K est nulle au moins dans deux cas : 1° lorsque la section a un centre de figure ; 2° lorsqu'elle a l'axe des z pour axe de symétrie, et que la contexture du milieu est en même temps symétrique par rapport au plan des zx. En effet, dans le premier cas, les équations (62) et celles du contour de la section ne changent nullement lorsqu'on change y en $-y$, z en $-z$, φ en $-\varphi$, K en $-$K ; d'où il suit que, si K est supposé connu et φ déterminé en fonction de y, z, on satisfera également aux conditions du problème en prenant $-$K au lieu de K, et, au lieu de φ, pour chaque point $(-y, -z)$ de la section, la valeur obtenue de φ, au point (y, z), changée de signe. Comme le problème n'a qu'une solution, il faut donc poser

$$K = -K = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(-y, -z) = -\varphi(y, z).$$

Dans le second cas, la constitution du milieu étant symétrique par rapport au plan des zx, on doit avoir, dans les formules (9), $\eta'' = 0$, $H = H' = 0$; avec ces réductions, les relations (62) ne changent pas, non plus que l'équation du contour, lorsqu'on change seulement y en $-y$, φ en $-\varphi$, K en $-$K ; d'où il résulte, comme précédemment, que le changement de y en $-y$ change φ en $-\varphi$, et que $K = 0$. Dans les deux cas, la dernière relation (62) est identiquement vérifiée ; car, à chaque élément $d\sigma$ en correspond un autre égal pour lequel y, z et φ ou seulement y et φ ont les mêmes valeurs, mais de signes contraires, que sur le premier, de manière à annuler l'intégrale qui forme le second membre de cette relation. Sur chacun de ces deux éléments, les dérivées $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ sont, dans le premier cas, égales et de même signe, tandis que, dans le second cas, la première $\frac{d\varphi}{dy}$ est égale et de même signe, et la seconde, $\frac{d\varphi}{dz}$, égale et de signe contraire ; par suite, la force T_2 y est égale dans les deux cas, tandis que T_3 y est égale et de même signe dans le premier, égale et de signe contraire dans le second.

Il est clair que la force $\mathcal{F}_1$ produirait une flexion inégale, parallèle au plan des $x'y'$, et que, comme dans le cas précédent (2° et 3°), mais d'une manière seulement approchée, l'ensemble des deux forces $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ produirait une flexion dans laquelle les fibres longitudinales, sensiblement parallèles les unes aux autres, resteraient à très-peu près per-

pendiculaires aux sections normales. Les angles α, β, γ que feraient avec les axes des x', y', z' une tangente aux fibres seraient, dans le cas d'une tige primitivement rectiligne,

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = -\frac{\mathcal{F}_1 x'^2}{2\mathcal{E}I'}, \quad \cos\gamma = -\frac{\mathcal{F} x'^2}{2\mathcal{E}I};$$

par suite on aurait, pour la tangente de l'angle fait avec le plan des $x'y'$ par celui de chaque fibre fléchie,

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_1}\frac{I'}{I};$$

ce plan ne coïncide avec celui suivant lequel la tige est sollicitée à fléchir, c'est-à-dire avec le plan qui contient la résultante des forces $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, que dans le cas où, I égalant I', toutes les droites menées dans le plan d'une section par son centre de gravité sont des axes d'inertie principaux de cette section.

6° Admettons enfin que X, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ soient nuls, et que des forces équivalentes à un couple de moment M, perpendiculaire à l'axe de la tige, soient seules appliquées à la seconde base du tronçon. Les formules (59 *bis*) donneront $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 = 0$, et on aura partout $N_1 = 0$, $\partial_x = \partial_y = \partial_z = g_{yz} = 0$. Les fibres longitudinales conservent sensiblement leur forme primitive. En effet, cette forme dépend des variations, le long des fibres elles-mêmes, des cosinus 1, $\frac{dv'}{dx'} + \frac{\cos\delta_0}{R_0}x'$, $\frac{dw'}{dx'} + \frac{\sin\delta_0}{R_0}x'$ des angles qu'elles font avec les axes, c'est-à-dire, à fort peu près, des dérivées en x' de ces cosinus. Or ces dérivées identiquement égales, à cause de $\partial_x = 0$, à 0, $\frac{\cos\delta_0}{R_0} + \frac{dg_{zy}}{dx'}$, $\frac{\sin\delta_0}{R_0} + \frac{dg_{zx}}{dx'}$, peuvent être réduites à 0, $\frac{\cos\delta_0}{R_0}$, $\frac{\sin\delta_0}{R_0}$ et rendues ainsi indépendantes des déplacements u', v', w'. Car, si aucune force, parallèle aux y' ou aux z', n'est appliquée à l'intérieur du tronçon, le moment M ne dépend pas de x', et T_2, T_3, g_{zx}, g_{xy}, K, qui, d'une section à l'autre, varient seulement avec ce moment M, n'en dépendent pas non plus; donc les deux dérivées $\frac{dg_{zy}}{dx'}$, $\frac{dg_{zx}}{dx'}$ sont nulles. Dans le cas contraire, elles sont au plus du même

ordre de grandeur que g_{xy}, g_{zx}, c'est-à-dire de l'ordre des coordonnées transversales y', z', et, par suite, très-petites.

Ainsi, on peut supposer nulles les dérivées secondes $\frac{d^2 v'}{dx'^2}$, $\frac{d^2 w'}{dy'^2}$, et, par suite, constantes, le long d'une même fibre, les dérivées premières $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$; or on a, sur la fibre moyenne, $v' = w' = 0$, $\frac{dv'}{dx'} = \frac{dw'}{dx'} = 0$, pour $x' = 0$; les déplacements v', w' seront donc nuls sur toute cette fibre, et les équations (51), (53) donneront

$$(63) \qquad v' = -Kx'z', \quad w' = Kx'y'.$$

Enfin, u', T_3, T_2 se détermineront par les relations (28), (29) et la dernière (59 *bis*), devenues

(63 *bis*)

$$\frac{dT_3}{dy'} + \frac{dT_2}{dz'} = 0;$$

sur le contour, $T_3 dz' - T_2 dy' = 0$;

en un point quelconque d'une ligne s_1, l'expression $T_3 dz' - T_2 dy'$ prendra des deux côtés des valeurs égales;

$$\int_\sigma (y'T_2 - z'T_3)\, dy'dz' = M;$$

équations dans lesquelles on remplacera T_3, T_2 par leurs expressions linéaires en g_{xy}, g_{zx}, et g_{xy}, g_{zx}, d'après (63), par

$$\frac{du'}{dy'} - Kz', \quad \frac{du'}{dz'} + Ky'.$$

On y joindra, pour achever de déterminer u', la relation $\frac{du'}{dx'} = 0$ et aussi la condition $u' = 0$ pour $x' = y' = z' = 0$.

Observons que ces équations et (63) auraient les mêmes formes, avec la même valeur numérique de l'angle K, si, l'origine des coordonnées rectangulaires étant transportée en un point matériel quelconque du tronçon, l'axe des x' y était constamment tangent à la fibre longitudinale qui passe par ce point, et si le plan des $x'y'$ était dirigé arbitrairement, mais de manière à se trouver, à l'origine des coordonnées, constamment tangent à la surface matérielle avec laquelle il coïncide avant les déplacements. Supposons d'abord que, sans changer l'origine, on donne aux axes des y', z' une nouvelle direction, en les faisant simplement tourner d'un angle α autour de celui des x'; d'après les formules

ordinaires de transformation, x' et u' n'auront pas changé, mais les coordonnées y', z' et les déplacements v', w' seront remplacés par d'autres y'', z'', v'', w'' dirigés suivant les nouveaux axes et égaux respectivement à $y'\cos\alpha + z'\sin\alpha$, $z'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $v'\cos\alpha + w'\sin\alpha$, $w'\cos\alpha - v'\sin\alpha$, et l'on aura bien identiquement, si les relations (63) sont vérifiées, $v'' = -\mathrm{K}x'z''$, $w'' = \mathrm{K}x'y''$. Si nous admettons actuellement que les nouveaux axes subissent, pendant que s'effectuent les déplacements de la tige, trois petites rotations quelconques, de manière à prendre des directions un peu différentes, les déplacements v'', w'' recevront respectivement les petites augmentations $\mathrm{r}x' - \mathrm{p}z''$, $\mathrm{p}y'' - \mathrm{q}x'$, correspondant à trois petites rotations relatives p, q, r de la tige autour des axes des x', y'', z''. Enfin, si l'origine est transportée en un autre point quelconque et subit elle-même, pendant que les déplacements s'effectuent, une petite translation quelconque, x', y'', z'' seront augmentés chacun d'une constante, et, en outre, v'', w'' recevront de petites augmentations arbitraires. Ainsi, en convenant d'effacer un accent à v'', w'', y'', z'', les nouveaux déplacements v', w' seront exprimés par $-\mathrm{K}(x' + \text{const.})z' - \mathrm{p}z'$, $\mathrm{K}(x' + \text{const.})y' + \mathrm{p}y'$, augmentés chacun d'une fonction linéaire et arbitraire de x'. Mais cette fonction linéaire est nulle, puisqu'on a par hypothèse $v' = w' = 0$ sur toute la longueur du nouvel axe des x'. De plus, le nouveau plan des $x'y'$ restant toujours, pour $x' = 0$, tangent à la surface matérielle avec laquelle il coïncidait avant les déplacements, on doit avoir $\frac{dw'}{dy'} = 0$ pour $x' = y' = z' = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{K} \times \text{const.} + \mathrm{p} = 0$: il vient donc, dans le nouveau système d'axes, $v' = -\mathrm{K}x'z'$, $w' = \mathrm{K}x'y'$, et, par suite, $g_{xy} = \frac{du'}{dy'} - \mathrm{K}z'$, $g_{zx} = \frac{du'}{dz'} + \mathrm{K}y'$. D'ailleurs, N_1 et X désignant identiquement, en chaque point, les mêmes forces que dans le système primitif d'axes, on a toujours $\mathrm{N}_1 = 0$, $\mathrm{X} = 0$, et la première des équations (2), jointe à la première des conditions (14), spéciales au contour s, à la première des conditions spéciales aux courbes s_1, et à la quatrième des relations (59 *bis*) (laquelle est évidemment la même pour tous les systèmes d'axes dans lesquels le plan des $y'z'$ est parallèle aux sections, puisque le couple M qui sollicite la tige normalement à son axe est toujours le même), donnera, pour déterminer T_2,

T_3, u', le système (63 *bis*), dans lequel les coefficients d'élasticité seront relatifs aux nouveaux axes.

La fibre moyenne $y' = z' = 0$ ne subit aucune flexion, ni aucune dilatation; mais chaque section tourne en bloc autour de cette fibre, en même temps que ses divers éléments superficiels sont soumis, perpendiculairement à leur plan, aux petits déplacements u'. En effet, pour $x' = 0$, v' et w' sont nuls, c'est-à-dire que les divers points de la section normale prise pour plan des $y'z'$ n'exécutent, parallèlement à ce plan, aucun mouvement relatif les uns par rapport aux autres, et ne peuvent que tourner d'un commun mouvement de rotation autour de la fibre moyenne. Il en est de même de la section située à la distance x' du plan des $y'z'$: les déplacements $v' = -Kx'z'$, $w' = Kx'y'$ sont précisément ceux qui se produisent quand cette section tourne autour de la fibre moyenne, par rapport au plan des $y'z'$ et dans le sens des y' positifs vers des z' positifs, d'un angle égal à Kx'.

A part les petits déplacements perpendiculaires aux plans des sections, la tige subit donc une simple torsion, égale à K *par unité de longueur.*

Le mouvement de rotation des sections autour de la fibre moyenne est incomparablement plus considérable que le déplacement u', parallèle à cette fibre, de leurs divers points. Car, la torsion étant K par unité de longueur, ce mouvement est mesuré par des angles de l'ordre de K et par des déplacements de l'ordre de Kz' ou Ky'. Or les dérivées en y' et z' de u' sont comparables à Kz' ou à Ky' [*], et le déplacement u', pour s'annuler sur la fibre moyenne, ne pourra qu'être de l'ordre de Kz'^2 ou Ky'^2, c'est-à-dire incomparablement plus petit.

Admettons que la tige soit symétrique de forme et de contexture par rapport à son axe, de manière que les équations des courbes s, s_1 et les coefficients d'élasticité qui entrent dans les expressions de T_2, T_3 restent les mêmes lorsqu'on tranforme y', z' en $-y'$, $-z'$. Les équations (63 *bis*) ne changeront pas, lorsque, u' conservant en chaque point d'une section la même valeur, on changera simplement la di-

[*] C'est-à-dire aux dérivées de v', w' par rapport à x'.

rection des axes, c'est-à-dire y', z' en $-y'$, $-z'$; en effet, dy', dz' y changeront de signe en même temps que les expressions de T_3, T_2, fonctions linéaires de g_{xy}, g_{zx} ou de $\frac{du'}{dy'} - Kz'$, $\frac{du'}{dz'} + Ky'$. Comme les équations des contours s, s_1 seront aussi les mêmes, il en résulte que u' a la même valeur au point $(-y', -z')$ qu'au point (y', z'), et que les forces T_2, T_3 ont les mêmes valeurs absolues, mais avec des signes contraires, en deux points d'une section symétriquement placés par rapport au centre de figure de cette section. Ces forces sont, par suite, nulles à ce centre.

Si la tige est symétrique de forme ou de contexture par rapport à un plan mené suivant son axe, celui des $z'x'$ par exemple, on aura $H = H' = 0$, T_3, T_2 ne dépendront respectivement que de g_{xy}, g_{zx}, c'est-à-dire de $\frac{du'}{dy'} - Kz'$, $\frac{du'}{dz'} + Ky'$; si l'on change y' en $-y'$, u' en $-u'$, la fonction T_3 restera la même, T_2 changera de signe, $\frac{dT_3}{dy'}$, $\frac{dT_2}{dz'}$ en changeront aussi, l'expression $T_3 dz' - T_2 dy'$ restera la même, et les équations (63 *bis*) n'auront pas changé. Donc, u' aura des valeurs égales et contraires aux deux points (y', z'), $(-y', z')$; en ces deux points, T_3 aura des valeurs égales, T_2 des valeurs égales et contraires. Par suite, la force T_2, dans chaque section, sera nulle sur toute la ligne $y' = 0$, et l'on aura, sur la même ligne, $g_{zx} = 0$, c'est-à-dire que les droites matérielles prises dans une section et primitivement contenues dans le plan de symétrie restent perpendiculaires aux fibres longitudinales de la tige. Lorsque celle-ci offre deux plans de symétrie menés suivant son axe, comme, par exemple, si elle est isotrope et à section triangulaire équilatérale, la fibre située à leur intersection, c'est-à-dire l'axe de la tige, reste de même perpendiculaire aux lignes matérielles de chaque section primitivement contenues dans les deux plans de symétrie, et se trouve, après comme avant les déplacements, normale aux sections : on a donc alors, tout le long de l'axe de la tige, $g_{zx} = 0$, $g_{xy} = 0$, et, par suite, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$.

Il doit y avoir, en général, un ou plusieurs points de chaque section où T_2, T_3 et par suite les glissements g_{zx}, g_{xy} sont à la fois nuls. En effet, à cause des deux dernières équations (32), réduites à $\int_\sigma T_3\, d\sigma = 0$,

$\int_\sigma T_2\,d\sigma = 0$, il y une ou plusieurs lignes le long desquelles $T_3 = 0$, et d'autres le long desquelles $T_2 = 0$: aux points d'intersection de ces deux systèmes de lignes, on aura donc $T_3 = T_2 = 0$. Ces points sont les mêmes, quelle que soit la valeur de l'angle K qui mesure la torsion. En effet, les équations (63 *bis*) ne changent pas, si l'on y multiplie à la fois u', K, M, et, par suite, g_{zx}, g_{xy}, T_2, T_3 par un même nombre : ce qui indique que u', K, g_{zx}, g_{xy}, T_2, T_3 varient proportionnellement à M.

§ IX. — *Lois générales de la torsion. — Rapports du problème de la torsion avec celui de l'écoulement régulier d'un liquide dans un tube rectiligne et de section constante, mouillé par ce liquide.*

D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, les lois approchées de l'extension, de la contraction et des flexions égales ou inégales peuvent être obtenues sans qu'on ait besoin d'intégrer, pour chaque forme de section et pour chaque sorte de contexture de la tige, aucun système d'équations aux dérivées partielles. Mais il n'en est pas ainsi lorsqu'il s'agit de la torsion : les déformations ∂, g se réduisent dans ce cas aux deux glissements g_{zx}, g_{xy}, négligeables dans tous les autres, et qu'on ne peut obtenir sans intégrer les équations (28) et (29), alors réduites à (63 *bis*). Faute de pouvoir effectuer en général cette intégration, cherchons s'il n'existerait pas, pour chaque forme de section et chaque mode de contexture, une relation simple entre l'angle K qui mesure la torsion et le couple M qui la produit.

Nous venons déjà d'observer que, pour une même tige plus ou moins tordue, K et M sont proportionnels. Considérons actuellement deux tiges ayant leurs sections semblables et constituées de manière qu'en deux points homologues de ces sections, G, G′, H, H′ aient les mêmes valeurs. Soit a le rapport de similitude, c'est-à-dire le nombre par lequel les coordonnées y', z' d'un point de la première doivent être multipliées pour donner celles du point homologue de la seconde. Si les équations (63 *bis*) sont supposées se rapporter à la première, et qu'on veuille les changer en celles qui régissent la seconde

en admettant que l'angle K soit le même dans les deux, il suffira d'y supposer partout y', z', dy', dz' multipliés par a, et u', M remplacés par le déplacement longitudinal et le moment de torsion relatifs à la seconde tige. Or, si l'on a soin de multiplier, dans ces équations, non-seulement y', z', dy', dz' par a, mais aussi u' par a^2 et M par a^4, chacune de ces relations sera encore vérifiée; car on aura multiplié ses deux membres par une même puissance de a : donc, pour une même valeur de l'angle K, qui mesure la torsion, le déplacement longitudinal u' et le moment M relatifs à la seconde tige sont respectivement proportionnels au carré et à la quatrième puissance des dimensions homologues, ou bien à l'aire d'une section normale et à son carré.

D'après cela, si nous appelons τ la valeur du moment de torsion pour une tige dont la section vaut 1, et qui est tordue par unité de longueur d'un angle égal à l'unité, le moment M d'une tige de même forme, et constituée de la même manière aux points homologues, mais ayant une section quelconque σ, et tordue par unité de longueur d'un angle K, sera donné par la formule

$$(64) \qquad M = \tau\sigma^2 K.$$

Ainsi, le moment de torsion est proportionnel à l'angle qui mesure la torsion par unité de longueur, au carré de la section de la tige, et à un coefficient qui dépend de la forme de la section et de la constitution élastique de la tige.

Ces lois sont pareilles à celles qui régissent l'écoulement permanent et bien régulier d'un liquide dans un tube mouillé par ce liquide (*voir* le § IV d'un Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides, au *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 2e série, t. XIII, 1868). Cela provient de ce que les deux problemes sont analytiquement très-semblables et conduisent même à des équations différentielles toutes pareilles, lorsque la tige dont on étudie la torsion est homogène et non tubulaire.

Étudions ce cas particulier d'une tige homogène et pleine par la méthode indiquée dans la seconde partie du § V. Nous avons vu à la fin du paragraphe précédent, que les équations (63 *bis*) sont applicables quelle que soit la fibre longitudinale choisie pour axe des x', ou bien

pour axe des x (en convenant d'effacer les accents de x', y', z'), et quelle que soit la direction de l'axe des y. Nous supposerons que cette direction soit celle pour laquelle la somme des deux coefficients $H + H'$ est nulle, direction dont l'existence a été établie dans la Note du § II. La première équation (63 *bis*) revient à dire qu'en appelant φ une certaine fonction de y et de z, on a

$$(65)\qquad T_2 = -\frac{d\varphi}{dy},\quad T_3 = \frac{d\varphi}{dz}.$$

La condition spéciale au contour s, $T_3\,dz - T_2\,dy = 0$, devient ainsi $\frac{d\varphi}{dz}dz + \frac{d\varphi}{dy}dy = 0$. Comme on peut ajouter à φ une constante quelconque, de manière à avoir $\varphi = 0$ en un point du contour, cette condition revient à poser $\varphi = 0$ sur toute la ligne s.

D'ailleurs, l'identité $\frac{dg_{zy}}{dz} - \frac{dg_{zx}}{dy} - \frac{d^2 v}{dx\,dz} + \frac{d^2 w}{dx\,dy} = 0$, si l'on y substitue à v, w leurs valeurs (63), $-Kxz$, Kxy, et à g_{xy}, g_{zx} leurs expressions tirées de (9) et de (65), devient l'équation indéfinie

$$G\frac{d^2\varphi}{dy^2} + G'\frac{d^2\varphi}{dz^2} - (H + H')\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + 2K = 0.$$

ou bien, en observant que $H + H' = 0$, et divisant par G,

$$(66)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\varphi}{dy^2} + \dfrac{G'}{G}\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} + \dfrac{2K}{G} = 0, \\ \text{à laquelle on joindra la condition} \\ \varphi = 0 \text{ sur le contour extérieur.} \end{array}\right.$$

L'expression (63 *bis*) de M, devenue $-\int_\sigma\left(y\frac{d\varphi}{dy} + z\frac{d\varphi}{dz}\right)d\sigma$, peut être transformée au moyen de l'intégration par parties appliquée comme nous avons fait souvent, en $-\int_s \varphi(y\,dz - z\,dy) + 2\int_\sigma \varphi\,d\sigma$. Comme la fonction φ est nulle sur tout le contour, il vient simplement

$$(67)\qquad M = 2\int_\sigma \varphi\,d\sigma.$$

Cela posé, pour comparer le problème de la torsion à celui de l'écoulement d'un liquide dans un tube, faisons

$$z\sqrt{\frac{G}{G'}} = z_1,$$

et l'équation indéfinie (66) deviendra

(66 *bis*) $$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz_1^2} + \frac{2K}{G} = 0.$$

Comme $\frac{2K}{G}$ est une constante, cette équation est pareille à celle qui donne la vitesse permanente, supposée représentée par φ, en tout point, ayant pour coordonnées y, z_1, de la section d'un tube cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x. De plus, si $F(y, z) = 0$ est l'équation de la section du contour de la tige, la condition au contour

$$\varphi = 0 \quad \text{pour} \quad F(y, z) = 0 \quad \text{ou pour} \quad F\left(y, z_1\sqrt{\frac{G'}{G}}\right) = 0,$$

est la même que la condition relative au contour de la section du même tube, pourvu que le liquide mouille partout le tube, et que ce contour ait pour équation

(68) $$F\left(y, z_1\sqrt{\frac{G'}{G}}\right) = 0.$$

Donc la fonction φ, à laquelle nous a conduit la théorie de la torsion, exprimerait aussi la vitesse des divers filets d'un liquide qui remplirait un tube dont la section serait représentée par (68). J'ai montré au § IV du Mémoire cité plus haut, qu'en appelant $\mathfrak{c}$ un certain coefficient dépendant seulement de la forme de la section (68), la dépense dans ce tube serait égale au produit de $\mathfrak{c}$ par le terme constant $\frac{2K}{G}$ de l'équation (66 *bis*) et par le carré de la section (68). Celle-ci, $\int dy\,dz_1$, est égale à $\sqrt{\frac{G}{G'}}\int dy\,dz$, ou à $\sigma\sqrt{\frac{G}{G'}}$. Mais la même dépense a aussi pour expression la somme des produits de chaque

élément $dy\,dz_1$ de la section (68) par la vitesse correspondante φ, c'est-à-dire

$$\int\varphi\,dy\,dz_1 = \sqrt{\frac{G}{G'}}\int_\sigma \varphi\,d\sigma, \quad \text{ou, d'après (67),} \quad = \frac{M}{2}\sqrt{\frac{G}{G'}}.$$

En égalant ces deux expressions de la dépense, on tire

$$(69) \qquad M = \frac{4\mathfrak{T}}{\sqrt{GG'}}\sigma^2 K.$$

Cette formule donne immédiatement le moment M de torsion, pour une tige dont la section σ a son contour représenté par $F(y, z) = 0$, si on connait le coefficient $\mathfrak{T}$ dont se trouve affectée l'expression de la dépense dans un tube dont la section a son contour représenté par $F\left(y, z_1\sqrt{\frac{G'}{G}}\right) = 0$ [*].

---

[*] Par exemple, quand ce dernier contour est une ellipse ayant b, c pour demi-axes, on a

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{4\pi\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)} = \frac{0{,}0796}{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}$$

voir § V du Mémoire cité).

Si c'est un rectangle ayant b pour demi-longueur, et c pour demi-largeur,

$$\mathfrak{T} = \frac{\alpha}{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}},$$

où α, coefficient exprimé en série transcendante, prend les valeurs

$$0{,}0703;\ 0{,}0715;\ 0{,}0731;\ 0{,}0746;\ 0{,}0757;\ 0{,}0789;\ 0{,}0833 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{12},$$

pour

$$\frac{b}{c} = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10,\ \infty.$$

(*voir* § VI).

Enfin, si c'est un triangle équilatéral,

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{20\sqrt{3}} = 0{,}0289$$

(*voir* Note II, à la fin du même Mémoire).

Cherchons actuellement les lois qui régissent la force élastique appliquée à un élément $d\sigma$ d'une section, force dont les composantes suivant les axes des x, y, z, rapportées à l'unité de surface, sont N_1, T_3, T_2. Cette force est tangentielle, puisque $N_1 = 0$. Elle est égale en grandeur à $\sqrt{T_3^2 + T_2^2}$ ou à $\sqrt{\frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}}$, expression que nous représenterons d'une manière abrégée, avec M. Lamé, par $\Delta_1 \varphi$; de plus, sa direction fait avec les axes des y et des z des angles ayant respectivement pour cosinus $\frac{T_3}{\Delta_1 \varphi}$, $\frac{T_2}{\Delta_1 \varphi}$, ou bien $\frac{1}{\Delta_1 \varphi} \frac{d\varphi}{dz}$, $\frac{-1}{\Delta_1 \varphi} \frac{d\varphi}{dy}$. Ceci posé, considérons les courbes infiniment voisines qui ont pour équation $\varphi =$ const., courbes qui seraient celles d'égale vitesse dans un tube plein de liquide, et dont chacune, composée d'un ou de plusieurs orbes fermés, enveloppe toutes les suivantes pour lesquelles φ va en croissant, jusqu'à la plus centrale, réduite à un ou plusieurs points où φ atteint sa plus grande valeur. La normale menée en (y, z) à la surface $\varphi =$ const. qui passe par ce point, et du côté où φ grandit, fait avec les axes des y et des z des angles dont les cosinus $\frac{1}{\Delta_1 \varphi} \frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{1}{\Delta_1 \varphi} \frac{d\varphi}{dz}$, indiquent qu'elle est justement perpendiculaire à la force exercée sur l'élément $d\sigma$ situé au même point. De plus, si nous appelons $d\varepsilon$ l'élément de cette normale qui mesure la distance de la courbe considérée et de celle sur laquelle la constante prend la valeur $\varphi + d\varphi$, dy et dz les deux projections, égales à $\frac{1}{\Delta_1 \varphi} \frac{d\varphi}{dy} d\varepsilon$, $\frac{1}{\Delta_1 \varphi} \frac{d\varphi}{dz} d\varepsilon$, de ε sur les deux axes des y et des z, il viendra

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz = \Delta_1 \varphi . d\varepsilon, \quad \text{ou bien} \quad \Delta_1 \varphi = \frac{d\varphi}{d\varepsilon}.$$

Ainsi, *les forces exercées aux divers points d'une section sont partout dirigées suivant les courbes* $\varphi =$ const., *qui seraient celles d'égale vitesse dans des tubes, et elles sont égales en chaque point, par unité de surface, à la dérivée de* φ *suivant la normale menée en ce point à la courbe* $\varphi =$ const., *qui y passe; elles ont la même expression que le glissement relatif, dans un tube, de deux couches liquides adjacentes.*

Si l'on construit les courbes $\varphi =$ const., en partant du contour même ($\varphi = 0$) des sections, ces courbes reproduisent les irrégularités

du contour, mais en les affaiblissant de plus en plus, de manière à être le plus distantes les unes des autres aux points situés sur les grands diamètres des sections et à être généralement le plus rapprochées à ceux qui correspondent aux petits diamètres. Aux divers points d'une même courbe $\varphi =$ const., la force $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ varie en raison inverse de la distance $d\varepsilon$ de cette courbe à sa voisine; ses valeurs maxima auront donc lieu en général sur les petits diamètres des sections, et ses valeurs minima sur les grands. Il est clair d'ailleurs que cette force devra être en moyenne d'autant plus grande qu'on se rapprochera davantage du contour, c'est-à-dire qu'on s'éloignera davantage des points centraux des sections où elle est nulle et où φ est maximum. La force $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ atteint donc en général ses plus grandes valeurs vers les points du contour les plus rapprochés des points centraux où elle est nulle, et où la vitesse serait le plus grande s'il s'agissait de l'écoulement d'un liquide dans un tube de forme analogue. Il me paraît probable que, même dans les cas les plus exceptionnels, ces plus grandes valeurs de $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ devront encore être cherchées sur le contour des sections et non dans leur intérieur : c'est ce qu'a pensé M. de Saint-Venant après avoir reconnu la vérité de ce principe dans un grand nombre de cas que je me contenterai d'indiquer au paragraphe suivant.

Si, au lieu de considérer la force totale $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$, on s'occupe de ses composantes $-\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, il est facile de montrer qu'elles ne deviennent jamais maxima ou minima dans l'intérieur des sections. Appelons $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ les coordonnées d'un point très-voisin de (y, z), et $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)'$, $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)'$ les valeurs de $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ en ce point. Pour ne considérer que la première de ces deux dérivées, il est évident que la série de Taylor donnera

$$(70)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)' - \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{d^2\varphi}{dy^2}\Delta y + \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\Delta z \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\varphi}{dy^3}\Delta y^2 + 2\frac{d^3\varphi}{dy^2dz}\Delta y\,\Delta z + \frac{d^3\varphi}{dy\,dz^2}\Delta z^2\right) + \ldots \end{aligned} \right.$$

L'ensemble des termes du second membre qui sont du second degré par rapport à Δy, Δz conservera le même signe pour toutes les valeurs possibles du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta z}$, à la condition nécessaire et suffisante que

$$\left(\frac{d^3\varphi}{dy^2dz}\right)^2 - \frac{d^3\varphi}{dy^3}\frac{d^3\varphi}{dy\,dz^2} \overset{=}{<} 0.$$

Or l'équation (66), différentiée respectivement en y et en z, donne

$$\frac{d^3\varphi}{dy\,dz^2} = -\frac{G}{G'}\frac{d^3\varphi}{dy^3}, \quad \frac{d^3\varphi}{dy^2dz} = -\frac{G'}{G}\frac{d^3\varphi}{dz^3},$$

ce qui change la relation précédente en

$$G^3\left(\frac{d^3\varphi}{dy^3}\right)^2 + G'^3\left(\frac{d^3\varphi}{dz^3}\right)^2 \overset{=}{<} 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d^3\varphi}{dy^3} = 0, \quad \frac{d^3\varphi}{dz^3} = 0;$$

et il en résulte

$$\frac{d^3\varphi}{dy\,dz^2} = 0, \quad \frac{d^3\varphi}{dy^2dz} = 0.$$

Ainsi, pour Δy et Δz très-petits, la somme des termes du second membre de (70) qui ne sont pas linéaires en Δy et Δz change de signe pour des valeurs convenables du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta z}$, si ce n'est peut-être aux points où toutes les dérivées troisièmes de φ s'annuleraient à la fois. Supposons qu'on prenne, à partir de chaque point (y, z) du plan des yz, une ordonnée x égale à la valeur correspondante de $\frac{d\varphi}{dy}$; et appelons x' l'ordonnée, égale à $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)'$, qui sera menée à partir de $(y + \Delta y, z + \Delta z)$. Le lieu des extrémités de toutes ces ordonnées donnera une surface, et l'on aura

$$(71) \quad \begin{cases} \mathrm{x}' - \mathrm{x} = \frac{d^2\varphi}{dy^2}\Delta y + \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\Delta z \\ \qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\varphi}{dy^3}\Delta y^2 + 2\frac{d^3\varphi}{dy^2dz}\Delta y\,\Delta z + \frac{d^3\varphi}{dy\,dz^2}\Delta z^2\right) + \ldots \end{cases}$$

Le plan tangent en (x, y, z), mené à cette surface, aura pour équation, en appelant x_1, y_1, z_1 les coordonnées courantes,

$$(72) \qquad x_1 - x = \frac{d^2\varphi}{dy^2}(y_1 - y) + \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}(z_1 - z).$$

D'après ce qui vient d'être dit, si l'on fait $y_1 - y = \Delta y$, $z_1 - z = \Delta z$, la différence $x' - x_1$, tout près du point (x, y, z), sera tantôt positive et tantôt négative. Donc la surface (71) est coupée par ses plans tangents, tout près du point de contact, de manière à se trouver en partie d'un côté de ces plans et en partie de l'autre côté, ou à avoir ses deux courbures principales de sens inverse, excepté peut-être pour les valeurs de (y, z), qui annulent à la fois toutes les dérivées troisièmes de φ et par suite ces courbures. Il en résulte que l'ordonnée x n'est nulle part maximum ou minimum; car, si elle l'était pour une valeur de (y, z), en construisant le plan (72) tangent, à l'extrémité de cette ordonnée, à la surface (71), celle-ci devrait, tout autour du point ou de la ligne de contact, quitter le plan tangent en se dirigeant partout d'un même côté de ce plan, c'est-à-dire sans le traverser: un plan mené de ce côté, parallèlement au plan tangent, et à une distance infiniment petite de celui-ci, devrait donc couper la surface (71) suivant une courbe fermée qui aurait nécessairement des parties convexes; or il est clair qu'en ces parties la surface (71) serait convexe elle-même et aurait ses deux courbures principales de même sens, ce qui est démontré impossible.

Donc les dérivées $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ ne peuvent être nulle part maxima ou minima dans l'intérieur des sections, et l'on aura leurs plus grandes et leurs plus petites valeurs en prenant les maxima et les minima de celles qu'elles acquièrent aux divers points du contour.

Terminons ce paragraphe en cherchant les relations qu'il faudrait joindre à (65), (66), et la modification à introduire dans (67), si, la tige étant creuse, la section σ se trouvait limitée, non-seulement par son contour extérieur, que nous continuerons à appeler s, mais encore par une courbe fermée intérieure s_0, enveloppant un espace σ_0 étranger à la tige. Il y aurait alors de plus : 1° la condition $T_3\,dz - T_2\,dy = 0$ ou $d\varphi = 0$ spéciale à ce nouveau contour, et qui, en y appelant φ_0 la

valeur de φ, s'écrirait simplement $\varphi_0 = \text{const.}$; 2° une relation pareille à (47), exprimant la continuité du déplacement u' dans tout l'intérieur de la section. En y substituant à v, w leurs valeurs $-Kxz$, Kxy, à g_{xy}, g_{zx} leurs expressions (9), et $-\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ à T_2, T_3, cette condition devient

$$\int_{s_0}\left[\left(G'\frac{d\varphi}{dz} - H'\frac{d\varphi}{dy}\right)dy - \left(G\frac{d\varphi}{dy} - H\frac{d\varphi}{dz}\right)dz - K(y\,dz - z\,dy)\right] = 0.$$

Or, si l'on change, comme nous avons fait plusieurs fois, des intégrales prises dans tout l'intérieur d'une section en d'autres prises sur son contour, et si l'on observe que le contour s_0 est supposé décrit en tournant dans le sens des z positifs vers les y positifs, on trouve aisément

$$\sigma_0 = \int_{\sigma_0} dz\,dy = \int_{s_0} z\,dy, \quad \sigma_0 = \int_{\sigma_0} dy\,dz = -\int_{s_0} y\,dz.$$

De plus, sur le contour s_0, on a $\frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = 0$, et, par suite, à cause de $H' = -H$, $-H'\frac{d\varphi}{dy}dy + H\frac{d\varphi}{dz}dz = 0$. Les deux relations qu'il faudra joindre à (65) et (66) sont donc

$$(73) \qquad \varphi_0 = \text{const.}, \quad 2K\sigma_0 + \int_{s_0}\left(G'\frac{d\varphi}{dz}dy - G\frac{d\varphi}{dy}dz\right) = 0.$$

Quant à l'expression de M, $-\int_\sigma\left(y\frac{d\varphi}{dy} + z\frac{d\varphi}{dz}\right)d\sigma$, nous avons déjà vu (avant la formule 67), qu'elle se change en

$$-\int \varphi(y\,dz - z\,dy) + 2\int_\sigma \varphi\,d\sigma,$$

où la première intégrale est prise sur toute l'étendue du contour tant extérieur qu'intérieur. Comme $\varphi = 0$ sur le contour extérieur, cette intégrale se réduit $-\varphi_0\int_{s_0}(y\,dz - z\,dy)$, ou à $2\varphi_0\sigma_0$. Il vient donc, au lieu de (67),

$$(67\ bis) \qquad M = 2\left(\int_\sigma \varphi\,d\sigma + \varphi_0\sigma_0\right).$$

Lorsqu'on a trouvé l'expression de φ pour une section pleine, cette expression peut servir si la même section est évidée suivant une des courbes qui ont pour équation $\varphi =$ const.; en effet, elle vérifie la première condition (73) et elle satisfait aussi à la seconde; car elle donne, dans tout l'intérieur de la partie évidée σ_0, $G\frac{d^2\varphi}{dy^2} + G'\frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2K = 0$, relation qui, multipliée par $dy\,dz$ et intégrée sur toute l'étendue de l'aire σ_0, devient justement la seconde (73). Le moment de torsion est alors la différence de ceux que donneraient, pour une valeur égale de K, deux tiges pleines dont les sections auraient, l'une le contour s, l'autre le contour s_0 : le moment de la première serait $2\int_{\sigma+\sigma_0}\varphi\,d\sigma$, et celui de la seconde $2\int_{\sigma_0}(\varphi - \varphi_0)\,d\sigma$, car la même fonction φ pourrait servir au calcul de la torsion de cette seconde tige, pourvu qu'on la diminuât de la constante φ_0, afin de la rendre nulle sur le contour s_0 : la différence de ces deux moments est bien $2\left(\int_\sigma \varphi\,d\sigma + \varphi_0\sigma_0\right)$, c'est-à-dire l'expression (67 *bis*) de M.

§ X. — *Sections pleines pour lesquelles les intégrations relatives à la torsion et à la flexion inégale ont pu être effectuées.*

Pour évaluer, aux divers points d'une section, les forces T_2, T_3 et le déplacement u', dans le cas de la torsion d'une tige pleine homogène, et dans celui de sa flexion inégale, il faut intégrer, dans le premier cas, le système (66), et, dans le second, en se bornant à des sections symétriques de forme et de contexture par rapport au plan des zx, sollicitées à fléchir parallèlement à ce plan, le système (62) réduit à

$$(74)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dy^2} + \dfrac{G'}{G}\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} + \dfrac{2\mathfrak{F}\eta}{GEI}y = 0, \\[2ex] \left(\dfrac{d\varphi}{dy} + \dfrac{\mathfrak{F}}{2I}z^2\right)dy + \dfrac{d\varphi}{dz}dz = 0 \text{ sur le contour,} \\[2ex] \varphi = 0 \quad \text{pour} \quad y = z = 0. \end{cases}$$

M. de Saint-Venant a effectué ces intégrations pour les sections les plus usuelles, en partant d'équations qui reviennent à (66) ou à (74), mais qui contiennent, au lieu de φ, le déplacement u', et il a pu ainsi déterminer les formes que prennent les sections primitivement normales aux fibres, les points où se produisent les plus grandes déformations et les valeurs maxima que le moment M et la force $\mathfrak{F}$ ne peuvent dépasser sans altérer la constitution de la tige. Ces questions sont traitées dans les beaux Mémoires sur la torsion (*Savants étrangers*, t. XIV, 1855) et sur la flexion des prismes (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. I, 2e série, 1856), et aussi dans l'édition de la *Mécanique appliquée de Navier*, annotée par M. de Saint-Venant (Note du n° 156). Je me contenterai ici d'indiquer les expressions de φ que fournit, pour ces cas, l'intégration des équations (66) et (74).

1° Les équations indéfinies des systèmes (66) et (74) sont d'abord vérifiées par des expressions entières de y et z, qui ont, si b, c désignent des constantes arbitraires, une première partie de la forme

$$(75)\quad \begin{cases} K\dfrac{b^2c^2}{c^2G+b^2G'}\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}\right), \quad \text{ou encore} \quad -\dfrac{K}{G}y^2, \quad \text{pour} \quad (66), \\ \text{et} \quad -\dfrac{\mathfrak{F}\gamma_1}{3GEI}y^3 \quad \text{pour} \quad (74), \end{cases}$$

suivie d'une autre partie φ_1, qui doit vérifier l'équation

$$(76)\qquad \frac{d^2\varphi_1}{dy^2}+\frac{G'}{G}\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}=0,$$

et dont les termes d'un degré quelconque m ont par suite pour somme, en appelant J et J' deux constantes arbitraires,

$$(77)\quad \begin{cases} J\left[y^m-\dfrac{m(m-1)}{1.2}y^{m-2}\dfrac{G}{G'}z^2+\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}y^{m-4}\left(\dfrac{G}{G'}\right)^2z^4-\dots\right] \\ \quad +J'\left[\dfrac{m}{1}y^{m-1}\sqrt{\dfrac{G}{G'}}z-\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}y^{m-3}\left(\sqrt{\dfrac{G}{G'}}\right)^3z^3+\dots\right]. \end{cases}$$

Dans le problème de la torsion, on pourra poser

$$(78)\qquad \varphi=K\frac{b^2c^2}{c^2G+b^2G'}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)+\varphi_1,$$

pourvu que la section soit limitée par un des contours, de formes infiniment variées, qui ont pour équation

$$\text{(79)} \qquad \mathrm{K}\frac{b^2c^2}{c^2\mathrm{G}+b^2\mathrm{G}'}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)+\varphi_1=0.$$

Les plus intéressants de ces contours sont : 1° pour $\varphi_1 = 0$, une ellipse dont b, c sont les demi-axes ; 2° si $\mathrm{G}'=\mathrm{G}$, et qu'on fasse $c=b$, $\varphi_1=\frac{2\mathrm{K}}{3\sqrt{3}\mathrm{G}b}(y^3-3yz^2)$, un triangle équilatéral dont le côté est $3b$, et qui a pour équation

$$1-\frac{y^2+z^2}{b^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{y^3-3yz^2}{b^3}=0, \quad \text{ou} \quad \left[\left(1-\frac{y}{b\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{z}{b}\right)^2\right]\left[1+\frac{2y}{b\sqrt{3}}\right]=0;$$

3° si $\mathrm{G}'=\mathrm{G}$ et que b'^2, c'^2, n étant des constantes arbitraires, on pose

$$b^2=c^2=\frac{2(1+n)b'^2c'^2}{b'^2+c'^2},$$

$$\varphi_1=\frac{\mathrm{K}b^2}{2\mathrm{G}(1+n)b'^2c'^2}\left[(1+2n)(b'^2-c'^2)(y^2-z^2)-2n(y^4-6y^2z^2+z^4)\right],$$

des courbes symétriques par rapport aux axes des y et des z, qui ont b', c' pour demi-axes et pour équation

$$c'^2y^2+b'^2z^2-n(b'^2-c'^2)(y^2-z^2)+n(y^4-6y^2z^2+z^4)=(1+n)b'^2c'^2;$$

toutefois, elles ne sont fermées, si l'on suppose $c'^2<b'^2$, qu'autant que n est compris entre $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ et $\frac{-c'^2}{b'^2+c'^2}$; parmi ces courbes, il convient de distinguer : un carré à côtés concaves et à angles légèrement aigus qu'on obtient en faisant $b'=c'$, $n=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, un autre carré à angles arrondis dont les côtés ont leur partie moyenne concave, et qu'on obtient lorsque $b'=c'$, $n=0{,}2$; pour $c'<b'$ et $n>0$ plusieurs courbes qui ressemblent aux sections des rails de chemins de fer; pour $c'^2<0$ et $n>0$ des orbes ovales; 4° enfin (lorsque $\mathrm{G}'=\mathrm{G}$) des contours en forme de croix de Malte, qui ont pour

équation

$$y^2+z^2-\frac{48}{49}\frac{16}{17}\frac{y^4-6y^2z^2+z^4}{b'^2}+\frac{12}{49}\frac{16}{17}\frac{y^8-28y^6z^2+70y^4z^4-28y^2z^6+z^8}{b'^6}$$
$$=b'^2\left(1-\frac{36}{49}\frac{16}{17}\right).$$

L'intégrale

$$(80)\qquad \varphi=-\frac{\mathfrak{F}\eta}{3\,\mathrm{GEI}}y^3+\varphi_1$$

s'applique moins bien au problème de la flexion, parce que le contour y a pour équation, non pas simplement $\varphi=0$, mais bien la seconde équation (74), qui reste à intégrer. Cette intégration peut se faire, lorsque, n et c désignant deux constantes arbitraires, on prend

$$\varphi_1=\frac{\mathfrak{F}}{2\mathrm{I}(n+1)}\left[-nc^2y+\frac{\mathrm{G}'}{3\mathrm{G}}\left(y^3-3y\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}z^2\right)\right],$$

ou bien

$$\varphi=\frac{\mathfrak{F}}{2\mathrm{I}}\left[-\frac{2\eta}{3\mathrm{GE}}y^3-\frac{nc^2}{n+1}y+\frac{\mathrm{G}'}{3(n+1)\mathrm{G}}\left(y^3-3y\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}z^2\right)\right],$$

et l'équation finie du contour qu'on obtient est, si l'on appelle b une troisième constante arbitraire,

$$(1-\mathrm{K})\left(\frac{y}{b}\right)^n+\mathrm{K}\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,\quad\text{où}\quad \mathrm{K}=\frac{\mathrm{EG}'-2(n+1)\eta}{(n-2)\mathrm{EG}}\frac{b^2}{c^2}.$$

Cette équation représente une courbe qui a b, c pour demi-axes, et qui se réduit à une ellipse si l'on y choisit n de manière que $\mathrm{K}=1$.

2° Lorsque la section est un rectangle ayant son centre à l'origine et ses côtés $2b$, $2c$ parallèles aux axes, les intégrales des systèmes (66) et (74) sont transcendantes.

Considérons d'abord le système (66). En appelant k' un nombre entier et posant

$$k=(2k'+1)\frac{\pi}{2b},$$

l'expression

$$\varphi = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{G}}\left[b^2 - y^2 + \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \mathrm{L}\, \frac{e^{kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}}{e^{kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}} \cos ky\right],$$

vérifiera l'équation indéfinie (66) et donnera même $\varphi = 0$ sur les deux côtés $y = \pm b$, car on aura sur ces côtés $\cos ky = 0$. Il suffira donc de déterminer les coefficients L de manière à donner $\varphi = 0$ sur les deux côtés $z = \pm c$, ou bien

$$\sum_{k'=0}^{k'=\infty} \mathrm{L} \cos ky = y^2 - b^2 \quad \text{pour} \quad y \quad \text{compris entre} \quad -b \quad \text{et} \quad +b.$$

Cela aura lieu, si l'on prend, d'après une formule connue d'analyse,

$$\mathrm{L} = \frac{2}{b}\int_0^b (y^2 - b^2) \cos ky\, dy = \mp \frac{4}{b k^3},$$

en prenant le signe $-$ pour k' pair et $+$ pour k' impair. Ainsi l'expression définitive de φ sera

$$(81) \quad \varphi = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{G}b}\left[b(b^2 - y^2) + \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{\mp 4}{k^3}\, \frac{e^{kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}}{e^{kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}} \cos ky\right] \text{ [*]}.$$

Passons au système (74). En supposant encore k' entier et

$$k = \frac{k'\pi}{b},$$

la formule

$$\varphi = -\frac{\mathfrak{F}\eta}{\mathrm{GEI}}\left[\frac{y^3}{3} + \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \mathrm{L}\, \frac{e^{kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}}{k\left(e^{kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}\right)} \sin ky\right]$$

[*] On peut voir au Mémoire cité plus haut [*Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides*, formules (17 *bis*)], une autre expression de φ, qui équivaut à (81), mais où b et c, y et z entrent symétriquement.

vérifie l'équation indéfinie (74), la condition $\varphi = 0$ pour $y = z = 0$, et la relation $\frac{d\varphi}{dz} = 0$ pour $y = \pm b$, relation à laquelle se réduit, sur les deux côtés $y = \pm b$, la condition spéciale au contour. Il ne reste plus qu'à choisir les coefficients L de manière à satisfaire à cette condition sur les deux autres côtés, c'est-à-dire à avoir

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{\vartheta}{2I} z^2 = 0 \quad \text{pour} \quad z = \pm c,$$

ou bien

$$\sum_{k'=0}^{k'=\infty} \mathrm{L} \cos ky = \frac{\mathrm{GE}c^2}{2\eta} - y^2 \text{ pour } y \text{ compris entre } \pm b.$$

D'après la formule qui donne, si $f(y)$ est une fonction paire, connue de $y = -b$ à $y = +b$,

$$f(y) = \frac{1}{b}\int_0^b f(y)\,dy + \frac{2}{b}\sum_{k'=1}^{k'=\infty} \cos ky \int_0^b f(y) \cos ky\,dy,$$

il viendra

$$\mathrm{L} = \frac{1}{b}\int_0^b \left(\frac{\mathrm{GE}c^2}{2\eta} - y^2\right) dy = \frac{\mathrm{GE}c^2}{2\eta} - \frac{b^2}{3} \quad \text{pour} \quad k' = 0,$$

$$\mathrm{L} = \frac{2}{b}\int_0^b \left(\frac{\mathrm{GE}c^2}{2\eta} - y^2\right) \cos ky\,dy = \frac{\pm 4}{k^2} \quad \text{pour} \quad k' > 0,$$

en adoptant le signe + pour k' impair et le signe − pour k' pair. L'expression définitive de φ sera, par suite [*],

$$(82)\quad \varphi = -\frac{\vartheta\eta}{\mathrm{GEI}}\left[\frac{y^3}{3} + \left(\frac{\mathrm{GE}c^2}{2\eta} - \frac{b^2}{3}\right) y + \sum_{k'=1}^{k'=\infty} \frac{\pm 4}{k^3} \frac{e^{kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}}{e^{kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}} \sin ky\right].$$

---

[*] L'intégration des équations (66) relatives à la torsion, en y joignant même les conditions (73) s'il y a des cavités intérieures, peut encore être effectuée toutes les fois que, G' égalant G, la tige est limitée en tous sens par des surfaces appartenant

§ XI. — *Exemples divers d'équilibre et de mouvement d'une tige rectiligne dont les déformations totales sont très-petites.*

Admettons que les déplacements u, v, w, tous rapportés à un même système d'axes rectangulaires des x, y, z, soient très-petits sur toute l'étendue de la tige, supposée primitivement rectiligne et non torse, qui ainsi s'écartera peu de l'axe des x, et sera comprise entre deux abscisses $x = x_0$ et $x = x_1$ ayant pour différence la longueur de la tige. On pourra faire pour toute la tige ce qui a été fait aux paragraphes précédents pour un tronçon assez court, c'est-à-dire obtenir les

---

à deux systèmes de cylindres orthogonaux et isothermes Si l'on prend $\varphi = -\frac{K}{G}y^2 + \varphi_1$, les equations (66) et (73) deviendront

$$\frac{d^2\varphi_1}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} = 0,$$

$$\varphi_1 = \frac{K}{G}y^2 \quad \text{aux divers points du contour extérieur,}$$

$\varphi_1 = \frac{K}{G}y^2 + \text{const.}$, aux divers points de chaque courbe fermée du contour intérieur, en se réservant de déterminer la constante pour chacune de ces courbes de manière que la seconde condition (73) y soit vérifiée.

Le problème de la torsion, ainsi posé, sera identique à celui des températures stationnaires dans la tige proposée, supposée athermane, homogène et isotrope, si l'on admet que les diverses génératrices de sa surface soient entretenues à des températures φ_1, exprimées sur chacune par $\frac{K}{G}y^2$ ou par $\frac{K}{G}y^2 + \text{const.}$ Or, ce problème a été traité dans toute sa généralité et quelles que fûssent même ces températures, par M. Lamé (*Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, XI^e, XII^e et XIII^e Leçons; Paris, 1859). M. Lamé applique sa solution, aussi simple que s'il s'agissait d'une poutre rectangulaire en équilibre de température, à divers cas où la section est limitée par deux cercles excentriques ou par quatre portions de cercles, et par des lemniscates et des hyperboles. Quant au cas particulier intéressant, et qu'il se contente d'indiquer (XI^e Leçon, § CVIII), où la section σ est comprise entre deux ellipses homofocales, M. Clebsch en a développé le calcul, au point de vue spécial de la torsion (*Théorie de l'élasticité des corps solides*, Leipzig, 1862, §§ XXXIII, XXXIV et XXXV).

déplacements vrais d'équilibre en ajoutant respectivement ceux qui auraient lieu pour divers systèmes plus simples d'application des forces extérieures. Par exemple, supposons appliquées à la seconde base de la tige, au lieu des forces qui y agissent réellement : 1° trois forces $\mathcal{N}'$, $\mathcal{T}'_1$, $\mathcal{T}'$ appliquées à son centre de gravité, dirigées parallèlement aux trois axes des x, y, z, et égales aux résultantes suivant ces axes respectifs des actions réellement appliquées à cette extrémité de la tige; 2° trois couples respectivement perpendiculaires aux axes des x, des y, des z, et ayant leurs moments M', $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}'_1$ par rapport à ces axes égaux aux moments pareils résultants de ces actions. Appelons d'autre part : ρ' la valeur moyenne de ρ sur toute l'étendue d'une section σ; y_0, z_0 les coordonnées transversales du centre de gravité d'une section, déterminé dans l'hypothèse que chaque élément $d\sigma$ ait sa densité superficielle égale à la densité ρ, c'est-à-dire de manière que $\int_\sigma \rho(y-y_0)\,d\sigma = 0$, $\int_\sigma \rho(z-z_0)\,d\sigma = 0$ (ce centre de gravité est distinct généralement de celui qu'on obtient en supposant à chaque élément $d\sigma$ une densité superficielle égale à E, et par lequel nous admettons que l'axe des x soit mené); X, comme aux paragraphes précédents, la composante suivant les x de l'action extérieure exercée au point (x, y, z) sur l'unité de masse; Y_0 et Z_0 les composantes de cette action suivant les y et les z au point (x, y_0, z_0), $Y_0 - \zeta(z-z_0)$, $Z_0 + \zeta(y-y_0)$ les composantes pareilles (dans lesquelles nous supposerons ζ une simple fonction de x), pour le point (x, y, z). Les déplacements vrais pourront s'obtenir en ajoutant ceux qui auraient lieu, si le prisme était séparément soumis, dans son intérieur et sur sa seconde base : 1° aux forces X et $\mathcal{N}'$; 2° aux couple $\mathfrak{M}'$, appliqué à sa seconde base; 3° au couple pareil $\mathfrak{M}'_1$; 4° à la force $\mathcal{T}'$ et aux actions Z_0 supposées appliquées, par unité de masse, à toutes les molécules des diverses sections normales; 5° de même, aux forces $\mathcal{T}'_1$ et Y_0; 6° enfin, au couple M', appliqué à la seconde base, et à des actions suivant les y et les z égales respectivement, par unité de masse, à $-\zeta(z-z_0)$ et à $\zeta(y-y_0)$.

Pour appliquer à ces cas les formules du § VIII, il faut se rappeler que, dans ce paragraphe, x', y', z' et u', v', w' désignent les coordonnées primitives et les déplacements des divers points d'un tronçon

quelconque par rapport à trois axes rectangulaires dont deux sont les axes d'inertie principaux de la seconde base du tronçon. Par suite, les ∂, g, les N, T et les dérivées en x', y', z' des diverses fonctions que l'on peut avoir à considérer y sont les mêmes que si on adoptait, au lieu de ces axes, d'autres axes primitivement parallèles à ceux-là, en particulier ceux que nous adoptons actuellement, et dont nous supposerons l'origine, par exemple, au centre de gravité de la première base de la tige. De plus, si l'on veut appliquer en particulier ces formules à un tronçon dont la seconde base serait à la distance x de l'origine, il faut y remplacer $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$, $\mathfrak{X}$, M, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ par les composantes totales suivant les deux axes d'inertie principaux de cette base et leur perpendiculaire commune, et par les moments résultants relatifs aux mêmes droites, de toutes les forces extérieures qui agissent sur la partie de la tige comprise entre l'abscisse donnée x et l'abscisse extrême x_1. On trouve facilement :

1° Dans le cas où les forces se réduisent à X et $\mathfrak{X}'$,

$$(83) \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}' + \int_x^{x_1} dx \int_\sigma \rho X \, d\sigma, \quad \mathcal{F}_1 = \mathcal{F} = 0, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 = M = 0;$$

2° et 3° Quand un des couples $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}'_1$ perpendiculaire aux y ou aux z est seul appliqué à la seconde base de la tige, sans qu'aucune force agisse sur son intérieur,

$$(84) \quad \begin{cases} \text{Soit} \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}', \quad \mathfrak{X} = \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = 0, \quad \mathfrak{M}_1 = M = 0, \\ \text{Soit} \quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}'_1, \quad \mathfrak{X} = \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = 0, \quad \mathfrak{M} = M = 0; \end{cases}$$

4° Dans le cas où les forces se réduisent à Z_0 et $\mathcal{F}'$,

$$(85) \begin{cases} \mathcal{F} = \mathcal{F}' + \int_x^{x_1} \rho' Z_0 \sigma \, dx, \quad \mathfrak{M} = -\mathcal{F}'(x_1 - x) - \int_x^{x_1} \rho' Z_0 \sigma (x' - x) \, dx', \\ \mathfrak{X} = \mathcal{F}_1 = 0, \quad \mathfrak{M}_1 = M = 0; \end{cases}$$

dans l'intégrale $\int_x^{x_1} \rho' Z_0 \sigma (x' - x) \, dx'$, x' désigne les abscisses comprises entre x qui est celle de la section considérée, et x_1 qui est celle de l'extrémité de la tige; ρ', Z_0, σ y sont donc fonctions de x';

5° De même, s'il n'y a que les forces Y_0 et $\mathcal{F}'_1$,

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}'_1 + \int_x^{x_1} \rho' Y_0 \sigma dx, \quad \mathfrak{M}_1 = \mathcal{F}'_1 (x_1 - x) + \int_x^{x_1} \rho' Y_0 \sigma (x' - x) dx',$$

$$\mathfrak{N} = \mathcal{F} = 0, \quad \mathfrak{M} = M = 0;$$

6° Enfin, supposons que les forces se réduisent au couple M', perpendiculaire aux x, sur la seconde base, et aux composantes $-\zeta(z - z_0)$, $\zeta(y - y_0)$, respectivement parallèles aux y et aux z, sur l'unité de masse; appelons J le moment d'inertie polaire d'une section, autour du point (y_0, z_0) de la section (moment calculé dans l'hypothèse que chaque élément $d\sigma$ ait une densité superficielle égale à ρ), c'est-à-dire l'intégrale $\int_\sigma \rho [(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] d\sigma$, et observons que l'expression $\int_\sigma \rho (yZ - zY) d\sigma$, ou $\zeta \int_\sigma \rho [y(y - y_0) + z(z - z_0)] d\sigma$ devient aisément $\left[\text{à cause de } \int_\sigma \rho(y - y_0) d\sigma = \int_\sigma \rho(z - z_0) d\sigma = 0\right]$, ζJ. Nous trouverons

$$(86) \quad M = M' + \int_x^{x_1} \zeta J \, dx, \quad \mathfrak{N} = \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = 0, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 = 0.$$

Dans chacun de ces cas, les formules du § V permettront d'obtenir complétement N_1, T_3, T_2 pour chaque valeur de x, c'est-à-dire sur toute l'étendue des diverses sections normales de la tige, et, si l'on divise celle-ci en tronçons très-courts, les formules du § VI donneront ensuite la nouvelle forme de chaque tronçon, et par suite de toute la tige.

Dans les cinq premiers cas, où il n'y aura pas de torsion sensible, il est particulièrement intéressant de chercher ce que devient la fibre centrale de la tige, celle qui correspond à $y = z = 0$. Les deux identités

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{d\partial_x}{dz} + \frac{dg_{zx}}{dx}, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{d\partial_x}{dy} + \frac{dg_{xy}}{dx},$$

dans lesquelles, d'après les raisonnements qui précèdent les for-

mules (55), on pourra négliger les dérivées en x de g_{zx}, g_{xy}, deviennent, au moyen de (52) et (52 *bis*),

$$(87)\qquad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}\mathrm{I}}, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}\mathrm{I}'}.$$

Ces équations détermineront complétement v et w sur toute la longueur de la fibre centrale; car on pourra supposer les axes choisis de manière que, pour $x = 0$, on ait sur cette fibre, $u = v = w = 0$, $\frac{dv}{dx} = \frac{dw}{dx} = 0$.

Quant à u, les mêmes relations (52) et (52 *bis*) donneront, sur la fibre centrale,

$$(87\ bis)\qquad \partial_x \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathcal{E}\sigma};$$

relation qui, multipliée par dx, et intégrée à partir de $x = 0$, déterminera complétement u, puisqu'on a, pour $x = 0$, $u = 0$.

Dans le premier cas, où les forces se réduisent à X et $\mathfrak{N}'$, on aura, d'après (83), (87) et (87 *bis*),

$$(83\ bis)\qquad v = w = 0, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathfrak{N}' + \int_x^{x_1} dx \int_\sigma \rho \mathrm{X}\, d\sigma\right).$$

La fibre centrale reste droite; mais elle est dilatée ou contractée.

Dans les second et troisième cas, il résulte de (84) et des mêmes relations (87), (87 *bis*), en supposant $\mathcal{E}$, I, I' indépendants de x,

$$(84\ bis)\qquad \begin{cases} \text{soit} \quad u = v = 0, \quad w = -\dfrac{\mathfrak{M}'}{2\mathcal{E}\mathrm{I}} x^2; \\ \text{soit} \quad u = w = 0, \quad v = \dfrac{\mathfrak{M}'_1}{2\mathcal{E}\mathrm{I}'} x^2: \end{cases}$$

la fibre centrale n'est ni comprimée, ni dilatée; mais elle est fléchie en un arc de cercle dont le plan est parallèle à celui des zx ou à celui des xy, et dont la courbure est $\frac{-\mathfrak{M}'}{\mathcal{E}\mathrm{I}}$ ou $\frac{\mathfrak{M}'_1}{\mathcal{E}\mathrm{I}'}$.

Dans le quatrième cas, où les forces se réduisent à Z_0 et à $\mathfrak{F}'$, les

relations (85) et les mêmes (87), (87 *bis*), donneront

$$u = v = 0, \quad w = \int_0^x dx \int_0^x \frac{dx}{\mathcal{E}I} \left[\mathcal{F}'(x_1 - x) + \int_x^{x_1} \rho' Z_0 \sigma (x' - x) dx' \right].$$

Le fibre n'est ni dilatée, ni contractée; mais elle est fléchie parallèlement au plan des zx, et sa courbure en chaque point est

$$(85\ bis) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{\mathcal{E}I} \left[\mathcal{F}'(x_1 - x) + \int_x^{x_1} \rho' Z_0 \sigma (x' - x) dx' \right].$$

Il en est de même dans le cinquième cas, à cela près que le plan de la flexion est celui des xy.

Étudions enfin le sixième cas. Nous ferons passer l'axe des x, pour ce cas seulement, par les centres de gravité (y_0, z_0) des sections, obtenus en supposant aux divers éléments de celles-ci, des densités superficielles égales à ρ, et nous appellerons fibre centrale le lieu des points matériels qui joindront ces centres. Les formules (86) et (87) donneront $v = w = 0$ pour $y = z = 0$; et, comme on aura d'ailleurs partout $\partial_x = 0$, la fibre centrale ne sera, ni fléchie, ni dilatée, ni contractée. De plus, d'après des considérations placées vers la fin du § VIII, on peut regarder u comme nul à côté de v, w, et supposer que la tige est simplement tordue autour de la fibre centrale, c'est-à-dire que les sections qui lui étaient primitivement normales n'ont pas cessé de l'être et sont encore sensiblement planes, mais qu'elles ont simplement tourné autour d'elle d'angles inégaux. A la distance x de l'origine, la torsion par unité de longueur, c'est-à-dire la dérivée par rapport à x de l'angle dont les sections ont tourné, est égale à la quantité K des formules de (63) à (69). Donc, si l'on appelle, comme dans (64), τ un coefficient qui ne dépend que de la constitution du milieu et de la forme de la section σ, cette formule (64) donnera

$$(86\ bis) \qquad M \quad \text{ou} \quad M' + \int_x^{x_1} \zeta J\, dx = \tau K \sigma^2.$$

Cette formule donnera K pour toutes les valeurs de x, et, par suite, les positions relatives de toutes les sections.

Supposons actuellement qu'on fasse vibrer la tige, et proposons-nous de trouver les équations différentielles de son mouvement. Nous distinguerons principalement, conformément à ce qu'indique l'expérience, des vibrations longitudinales, transversales, tournantes. Chaque extrémité de la tige sera, ou libre, ou simplement appuyée sur un corps fixe, ou encastrée, c'est-à-dire fixée sur une longueur très-petite, ou obligée d'entraîner un corps rigide de masse et de figure données, ou enfin unie, soit directement, soit par l'intermédiaire d'un corps rigide de masse **M**, à une autre tige qui fera suite à la première.

D'après le principe de la superposition des petits effets, nous pourrons calculer à part les déplacements d'équilibre dus aux forces qui ne varient pas pendant le mouvement, et à part les déplacements qui dépendent des forces produites par le mouvement même. Comme nous ne voulons nous occuper ici que de ces derniers, les forces X, Y, Z se réduiront à celles d'inertie $-\frac{d^2u}{dt^2}$, $-\frac{d^2v}{dt^2}$, $-\frac{d^2w}{dt^2}$, et celles qui seront exercées aux extrémités de la tige seront nulles si la tige y est libre, ou égales, dans le cas contraire, aux réactions des corps sur lesquels elle s'appuie ou qu'elle entraîne dans son mouvement.

1° Dans le cas des vibrations longitudinales, le déplacement u sera sensiblement constant sur toute l'étendue d'une même section, et la troisième équation (83 *bis*), dans laquelle il faudra faire $X = -\frac{d^2u}{dt^2}$ et $\int_\sigma \rho\, d\sigma = \rho'\sigma$, donnera

$$(87\,a)\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathfrak{N}' - \int_x^{x_1} \rho' \frac{d^2u}{dt^2}\sigma\, dx\right), \quad \text{ou} \quad \int_x^{x_1} \rho' \frac{d^2u}{dt^2}\sigma\, dx = \mathfrak{N}' - \mathcal{E}\sigma\frac{du}{dx}.$$

En différentiant cette relation par rapport à x, il vient l'équation indéfinie

$$(87\,b)\qquad \rho'\sigma\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\sigma\frac{du}{dx}\right).$$

Si l'on fait $x = x_1$, la relation (87 a) devient $\mathfrak{N}' = \mathcal{E}\sigma\frac{du}{dx}$, ce qui signifie que l'action excercée, à travers une section, par la matière située par rapport à cette section du côté des x positifs, est le produit

de $\mathcal{E}\sigma$ par la dilatation linéaire ∂_x, de la tige, sur cette section. Par suite, on a $\frac{du}{dx}=0$ à toute extrémité libre, et $\mathcal{E}\sigma\frac{du}{dx}=\mp\mathbf{M}\frac{d^2u}{dt^2}$, à une extrémité où la tige est fixée à un corps solide de masse $\mathbf{M}$ qu'elle entraîne dans son mouvement, en adoptant $-\mathbf{M}$ ou $+\mathbf{M}$, suivant que la masse $\mathbf{M}$ est à la seconde extrémité de la tige ou à la première; car cette masse exerce sur la tige, et suivant les x positifs, une action égale à sa force d'inertie $-\mathbf{M}\frac{d^2u}{dt^2}$; les actions statiques de cette masse, telles que son poids, sont supposées avoir été distraites et comptées en tant que changeant simplement l'état d'équilibre. Si la tige considérée est liée à une autre par l'intermédiaire d'un corps rigide de masse $\mathbf{M}$, en appelant u_1 les déplacements de la seconde tige, il est clair d'abord qu'on aura, à l'extrémité commune, $u=u_1$, et, comme la force motrice de la masse $\mathbf{M}$ sera la résultante des deux tractions exercées sur cette masse par les deux tiges, on aura en outre, en désignant par σ_1, $\mathcal{E}_1$ la section et le coefficient moyen d'élasticité de la seconde

$$\mathbf{M}\frac{d^2u}{dt^2}=\mathcal{E}_1\sigma_1\frac{du_1}{dx}-\mathcal{E}\sigma\frac{du}{dx}.$$

En résumé, les déplacements devront vérifier, sur toute la longueur de chaque tige, une équation indéfinie telle que (87 *b*), et en outre, aux extrémités de ces tiges, les relations spéciales suivantes :

(87 *c*)

$\mathcal{E}\sigma\frac{du}{dx}=\mathfrak{N}'$ à une extrémité où la traction $\mathfrak{N}'$ est donnée,

$\frac{du}{dx}=0$ à une extrémité libre,

$u=0$ à une extrémité fixe [*],

$\mathcal{E}\sigma\frac{du}{dx}\pm\mathbf{M}\frac{d^2u}{dt^2}=0$ à une extrémité où une masse $\mathbf{M}$ est entraînée,

$u=u_1$ et $\mathcal{E}\sigma\frac{du}{dx}+\mathbf{M}\frac{d^2u}{dt^2}=\mathcal{E}_1\sigma_1\frac{du_1}{dx}$ à une extrémité où deux tiges se relient et supportent une masse $\mathbf{M}$.

2° Considérons actuellement des vibrations transversales supposées

[*] Cette condition deviendrait $u=$ une fonction donnée de t, si l'extrémité, au lieu d'être fixe, était assujettie à des déplacements donnés.

se faire, pour fixer les idées, dans le plan des zx. Le déplacement w sera sensiblement le même sur toute l'étendue d'une section σ, et la force d'inertie d'une tranche dont l'abscisse est x' et la longueur dx' vaudra, par suite, $-\rho'\sigma\frac{d^2w}{dt^2}dx'$. La seconde extrémité de la tige sera soumise, à chaque instant de son mouvement, à une force $\mathcal{F}'$ dirigée suivant les z et à un couple $\mathfrak{M}'$ parallèle au plan des zx. La relation (85 *bis*), en ajoutant à la parenthèse de son second membre le moment $\mathfrak{M}'$ changé de signe, conformément à ce qu'indique la première (87), deviendra

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{\mathcal{E}\mathrm{I}}\left[-\mathfrak{M}' + \mathcal{F}'(x_1 - x) - \int_x^{x_1}\rho'\sigma\frac{d^2w}{dt^2}(x'-x)\,dx'\right],\\
&\text{ou}\quad -\int_x^{x_1}\rho'\sigma\frac{d^2w}{dt^2}(x'-x)\,dx' = \mathfrak{M}' - \mathcal{F}'(x_1-x) + \mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2};\\
&\text{d'où il résulte, en différentiant par rapport à } x,\\
&\int_x^{x_1}\rho'\sigma\frac{d^2w}{dt^2}\,dx = \mathcal{F}' + \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Celle-ci, différentiée encore en x, donnera l'équation indéfinie

$$(88\ bis)\qquad \rho'\sigma\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) = 0.$$

De plus, il résulte de (88) que, pour $x = x_1$, $\mathfrak{M}' = -\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}$, $\mathcal{F}' = -\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right)$; c'est-à-dire que le moment total $\mathfrak{M}'$ et la composante suivant les z, des forces exercées à travers une section par la matière située, par rapport à cette section, du côté des x positifs, ont respectivement pour expressions $-\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}$ et $-\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right)$: la composante et le moment pareils des forces exercées par la matière située de l'autre côté de la même section seront évidemment égaux, mais contraires. Si une extrémité est libre, on y a donc $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$, $\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) = 0$. Si elle est appuyée sur un point fixe qui n'exercera évidemment qu'une simple réaction normale $\mathcal{F}'$, le moment $\mathfrak{M}'$ sera nul, et l'on y aura $w = 0$, $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$. Si elle est encastrée, c'est-à-dire

appuyée sur deux points fixes infiniment voisins, le couple $\mathfrak{M}'$ ne sera pas plus nul que la force $\mathcal{F}'$; mais il est clair qu'on pourra poser les deux relations $w = 0$, $\frac{dw}{dx} = 0$. Si une masse $\mathbf{M}$, placée à l'extrémité de la tige, subit les déplacements w de cette extrémité, sans tourner sur elle-même, elle exerce sur la tige une simple action normale à son axe et égale à $-\mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2}$: on a donc à cette extrémité $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$, $-\frac{d}{dx}\left(\varepsilon\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) = \mp\mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2}$, en adoptant $-\mathbf{M}$ ou $+\mathbf{M}$ suivant que la masse $\mathbf{M}$ est placée à la seconde extrémité de la tige ou à la première. Enfin, supposons qu'à l'extrémité $x = x_1$ se trouve une masse $\mathbf{M}$ assujettie à subir, sans tourner, les déplacements w, mais que la première tige y soit elle-même liée à une seconde, de manière que leurs axes se touchent. Il est clair qu'on aura d'abord, en appelant w_1 le déplacement transversal de la seconde tige, $w_1 = w$; mais, de plus, si l'on conçoit le tronçon compris entre deux sections normales infiniment voisines, construites, l'une dans la première tige et l'autre dans la seconde, la somme des composantes suivant les z des forces exercées sur ce tronçon sera nulle, ainsi que la somme des moments de ces forces autour d'une parallèle aux y, menée par le point où se rencontrent les axes des deux tiges. La réaction $-\mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2}$ de la masse $\mathbf{M}$, ainsi que l'action $-\mathcal{F}'$ ou $\frac{d}{dx}\left(\varepsilon\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right)$ exercée, suivant les z, sur la première base de ce tronçon, et l'action $-\frac{d}{dx}\left(\varepsilon_1\mathrm{I}_1\frac{d^2w_1}{dx^2}\right)$, exercée, suivant les z, sur la seconde base, auront des moments nuls; car leur direction rencontre la droite par rapport à laquelle se prennent les moments; mais la somme de ces forces sera nulle, et l'on devra poser

$$\frac{d}{dx}\left(\varepsilon\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) = \mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{d}{dx}\left(\varepsilon_1\mathrm{I}_1\frac{d^2w_1}{dx^2}\right).$$

L'équation des moments ne contiendra que le couple $-\mathfrak{M}'$ ou $\varepsilon\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}$ appliqué à la première base du tronçon, et le couple $-\varepsilon_1\mathrm{I}_1\frac{d^2w_1}{dx^2}$ appliqué à la seconde base. Chacun de ces deux moments sera même nul si les deux tiges ont leurs axes assujettis à se toucher, mais sans être soudées l'une à l'autre; car la réaction exercée sur chacune d'elles

par l'autre se réduit alors à une simple force. Lorsque, au contraire, les deux tiges sont soudées, on a seulement $\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2 w}{dx^2}-\mathcal{E}_1\mathrm{I}_1\frac{d^2 w_1}{dx^2}=0$; mais il est clair que leurs deux axes font alors un angle sensiblement constant, égal à π si les deux tiges, antérieurement aux déformations étudiées, se trouvaient exactement en ligne droite, et à $\pi-i$, i étant une petite quantité donnée, dans le cas contraire. Si l'on admet, pour plus de simplicité, que l'angle $\pi-i$ soit dans le plan des zx, on aura ainsi $\frac{dw_1}{dx}=\frac{dw}{dx}+i$.

Les vibrations transversales sont donc régies par autant d'équations indéfinies pareilles à (88 *bis*) qu'il y a de tiges placées bout à bout, et de plus par les conditions spéciales suivantes :

(88 *ter*)

$$\mathfrak{M}'=-\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2 w}{dx^2},\quad \mathfrak{F}'=-\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2 w}{dx^2}\right)$$ à une extrémité où le couple $\mathfrak{M}'$ et la force $\mathfrak{F}'$ sont donnés,

$$\frac{d^2 w}{dx^2}=0,\quad \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2 w}{dx^2}\right)=0$$ à une extrémité libre,

$$\frac{d^2 w}{dx^2}=0,\quad w=0$$ à une extrémité simplement appuyée,

$$\frac{dw}{dx}=0,\quad w=0$$ à une extrémité encastrée,

$$\frac{d^2 w}{dx^2}=0,\quad \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2 w}{dx^2}\right)=\pm\mathbf{M}\frac{d^2 w}{dt^2}$$ à une extrémité où une masse $\mathbf{M}$ est entraînée,

$$w=w_1,\quad \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2 w}{dx^2}\right)=\mathbf{M}\frac{d^2 w}{dt^2}+\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}_1\mathrm{I}_1\frac{d^2 w_1}{dx^2}\right)$$ à l'extrémité, commune à deux tiges, qui supporte une masse $\mathbf{M}$, et de plus,

$$\frac{d^2 w}{dx^2}=0,\quad \frac{d^2 w_1}{dx^2}=0$$ si les deux tiges sont simplement appuyées l'une sur l'autre,

$$\frac{dw_1}{dx}=\frac{dw}{dx}+i,\quad \mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2 w}{dx^2}=\mathcal{E}_1\mathrm{I}_1\frac{d^2 w_1}{dx^2}$$ si elles sont soudées (*).

(*) Ces deux dernières relations et deux précédentes, également spéciales au point de raccordement de deux tiges soudées bout à bout ou de deux portions d'une même tige, peuvent être aisément étendues au cas où la masse $\mathbf{M}$, située en ce point, est

3° Cherchons enfin les équations des vibrations tournantes, en adoptant pour axe des x le lieu des centres de gravité des sections, précédemment désignés par (y_0, z_0). Ces vibrations consistent en une série de torsions et de détorsions rapides, dans lesquelles chaque section tourne, à fort peu près dans son plan et autour de l'axe de la tige, d'un angle ω variable avec le temps t et avec l'abscisse x de la section. En supposant cet angle très-petit, les déplacements u, v, w de la molécule dont les coordonnées primitives sont (x, y, z), vaudront sensiblement 0, $-z\omega$, $y\omega$. Les forces X, Y, Z, réduites à celles d'inertie, vaudront donc respectivement 0, $z\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $-y\frac{d^2\omega}{dt^2}$, et l'équation (86 *bis*), dans laquelle il faudra faire ζ égal à $-\frac{d^2\omega}{dt^2}$, et K, angle de torsion par unité de longueur, égal à $\frac{d\omega}{dx}$, deviendra

$$(89)\qquad \tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx} = \mathrm{M}' - \int_x^{x_1} \mathrm{J}\frac{d^2\omega}{dt^2}\,dx, \quad \text{ou} \quad -\int_x^{x_1} \mathrm{J}\frac{d^2\omega}{dt^2}\,dx = -\mathrm{M}' + \tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx}.$$

---

soumise, dans le sens des z, à une force $-\mathbf{M}g$, telle que son poids, et mue longitudinalement de manière que son abscisse x_1 soit une fonction donnée de t, et que son déplacement transversal soit constamment égal à celui des points de la tige qui ont la même abscisse. Il suffira d'ajouter, dans l'une de ces relations, la nouvelle force $-\mathbf{M}g$ à celle d'inertie $-\mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2}$ de la masse $\mathbf{M}$, et aussi de remplacer $\frac{d^2w}{dt^2}$ par la vraie expression de l'accélération transversale de cette masse, c'est-à-dire par $\frac{d^2w}{dt^2} + 2\frac{d^2w}{dx\,dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2w}{dx^2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{dw}{dx}\frac{d^2x_1}{dt^2}$, comme on le trouve en différentiant deux fois w par rapport à t, après y avoir substitué x_1 à x. Quant à l'angle i, négligeable lorsque le poids $\mathbf{M}g$ n'est pas très-grand, on pourra le supposer une fonction donnée de x_1, et par suite de t.

Si la vitesse longitudinale de la masse $\mathbf{M}$ est seulement de l'ordre de grandeur de sa vitesse transversale, les dérivées successives, par rapport à t, de w et $\frac{dw}{dx}$, après qu'on a remplacé dans ces fonctions x par x_1, se réduisent sensiblement à $\frac{dw}{dt}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dx\,dt}, \ldots$, comme si x_1 était constant : par suite, les équations du problème ont la même forme que pour $x_1 = \text{const.}$, et les considérations ci-après, qui prouvent que ces équations déterminent complétement w, s'étendent au cas d'un poids voyageur le long d'une série de tiges placées bout à bout.

Différentiée en x, cette relation donne l'équation indéfinie des vibrations tournantes

$$(89\ bis)\qquad J\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx}\right).$$

De plus, si l'on y fait $x = x_1$, il vient

$$M' = \tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx}:$$

le moment, par rapport à l'axe des x, des forces exercées à travers une section par la matière située, relativement à cette section, du côté des x positifs, est donc égal à $\tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx}$; il est clair que le moment pareil des forces exercées par la matière située de l'autre côté de la section serait égal et contraire. Ce moment est nul à une extrémité libre; il acquiert des valeurs telles, qu'on ait $\omega = 0$ à une extrémité fixe; lorsqu'une masse rigide $\mathfrak{M}$, attachée à une extrémité libre, participe à son mouvement de rotation autour des x, le moment $\pm\tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx}$ est égal à celui des forces d'inertie de cette masse, moment qui a pour expression le produit de l'accélération angulaire changée de signe, $-\frac{d^2\omega}{dt^2}$, par le moment $\mathfrak{I}$ d'inertie de cette masse autour de l'axe des x, que nous supposerons être un de ses axes naturels de rotation. On adoptera le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que la masse sera à la seconde extrémité de la tige ou à la première. Enfin, lorsque la tige est reliée, par l'intermédiaire de la masse $\mathfrak{M}$, à une autre tige pour laquelle les quantités analogues à τ, σ, J, ω seront désignées par τ_1, σ_1, J_1, ω_1, il est évident qu'on a d'abord, à l'extrémité commune, $\omega = \omega_1$, et, en outre, que le moment $\tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx}$ des forces exercées sur la section $x = x_1$ de la première tige se compose du moment $-\mathfrak{I}\frac{d^2\omega}{dt^2}$ des forces d'inertie de la masse $\mathfrak{M}$, plus le moment $\tau_1\sigma_1^2\frac{d\omega_1}{dx}$ des actions exercées par la seconde tige sur la première.

Ainsi on aura, pour chaque tige, une équation indéfinie pareille à

(89 *bis*), et, en outre, les conditions spéciales suivantes :

$$(89\ ter)\quad\left\{\begin{array}{l}
\tau\sigma^2\dfrac{d\omega}{dx} = \mathrm{M}' \text{ à une extrémité où le moment } \mathrm{M}' \text{ est donné,}\\[2mm]
\dfrac{d\omega}{dx} = 0 \text{ à une extrémité libre,}\\[2mm]
\omega = 0 \text{ à une extrémité fixe,}\\[2mm]
\tau\sigma^2\dfrac{d\omega}{dx} \pm \mathfrak{I}\dfrac{d^2\omega}{dt^2} = 0 \text{ à une extrémité où une masse } \mathbf{M} \text{ est entraînée,}\\[2mm]
\omega = \omega_1 \text{ et } \tau\sigma^2\dfrac{d\omega}{dx} + \mathfrak{I}\dfrac{d^2\omega}{dt^2} = \tau_1\sigma_1^2\dfrac{d\omega_1}{dx} \text{ à une extrémité où}\\
\qquad \text{deux tiges, placées bout à bout, sont reliées par l'intermédiaire}\\
\qquad \text{d'une masse } \mathbf{M}.
\end{array}\right.$$

On peut remarquer que la forme des équations (89), (89 *bis*), (89 *ter*) est la même que celle de (87 *a*), (87 *b*), (87 *c*), c'est-à-dire que les vibrations tournantes ont la plus grande analogie avec les vibrations longitudinales et donnent lieu aux mêmes problèmes de calcul intégral.

Les équations (87 *b*), (87 *c*) et (88 *bis*), (88 *ter*) déterminent complétement u, w, pourvu que les déplacements initiaux u_0, w_0 et les vitesses initiales $\left(\frac{du}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)_0$, pour $t = 0$, soient donnés sur toute la longueur des tiges. En effet, u, w désignant une solution qui réponde à toutes ces conditions, soient $u + u'$, $w + w'$ toute autre solution. En remplaçant u, w par $u + u'$, $w + w'$, ces conditions deviennent

$$(90)\quad\left\{\begin{array}{l}
\rho'\sigma\dfrac{d^2u'}{dt^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\sigma\dfrac{du'}{dx}\right),\\[2mm]
u' = 0,\quad \dfrac{du'}{dt} = 0 \text{ pour } t = 0,\\[2mm]
\dfrac{du'}{dx} = 0 \text{ à une extrémité où } \mathfrak{N}' \text{ est donné et à une extrémité libre,}\\[2mm]
u' = 0 \text{ à une extrémité fixe ou assujettie à des mouvements donnés,}\\[2mm]
\mathcal{E}\sigma\dfrac{du'}{dx} \pm \mathbf{M}\dfrac{d^2u'}{dt^2} = 0 \text{ à une extrémité où une masse } \mathbf{M} \text{ est entraînée,}\\[2mm]
u' = u'_1 \text{ et } \mathcal{E}\sigma\dfrac{du'}{dx} + \mathbf{M}\dfrac{d^2u'}{dt^2} = \mathcal{E}_1\sigma_1\dfrac{du'_1}{dx} \text{ à une extrémité où}\\
\qquad \text{deux tiges se relient et supportent une masse } \mathbf{M};
\end{array}\right.$$

$$\rho'\sigma\frac{d^2w'}{dt^2}+\frac{d^2}{dx^2}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w'}{dx^2}\right)=0,$$

$$w'=0,\quad \frac{dw'}{dt}=0 \text{ pour } t=0,$$

(90 *bis*)

$\frac{d^2w'}{dx^2}=0,\quad \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w'}{dx^2}\right)=0$ à une extrémité où $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{F}'$ sont donnés, et à une extrémité libre,

$\frac{d^2w'}{dx^2}=0,\quad w'=0$ à une extrémité appuyée,

$\frac{dw'}{dx}=0,\quad w'=0$ à une extrémité encastrée,

$\frac{d^2w'}{dx^2}=0,\quad \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w'}{dx^2}\right)=\pm\mathbf{M}\frac{d^2w'}{dt^2}$ à une extrémité où une masse $\mathbf{M}$ est entraînée,

$w'=w'_1,\quad \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w'}{dx^2}\right)=\mathbf{M}\frac{d^2w'}{dt^2}+\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}_1\mathrm{I}_1\frac{d^2w'_1}{dx^2}\right)$ à l'extrémité, commune à deux tiges, qui supporte une masse $\mathbf{M}$, et en outre,

$\frac{d^2w'}{dx^2}=0,\quad \frac{d^2w'_1}{dx^2}=0$ si les deux tiges sont simplement appuyées l'une sur l'autre,

$\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w'}{dx^2}=\mathcal{E}_1\mathrm{I}_1\frac{d^2w'_1}{dx^2},\quad \frac{dw'}{dx}=\frac{dw'_1}{dx}$ si elles sont soudées.

Multiplions les deux équations indéfinies, respectivement par $\frac{du'}{dt}dx$, $\frac{dw'}{dt}dx$, et intégrons entre les valeurs x_0, x_1 de x qui correspondent aux extrémités de chaque tige, en transformant les seconds termes, au moyen de l'intégration par parties appliquée une fois sur l'équation en u' et deux fois sur l'équation en w'; il viendra

$$-\left[\mathcal{E}\sigma\frac{du'}{dx}\frac{du'}{dt}\right]_{x_0}^{x_1}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1}\left[\rho'\left(\frac{du'}{dt}\right)^2+\mathcal{E}\left(\frac{du'}{dx}\right)^2\right]\sigma\,dx=0,$$

$$\left[\frac{dw'}{dt}\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w'}{dx^2}\right)-\frac{d^2w'}{dx\,dt}\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w'}{dx^2}\right]_{x_0}^{x_1}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1}\left[\rho'\sigma\left(\frac{dw'}{dt}\right)^2+\mathcal{E}\mathrm{I}\left(\frac{d^2w'}{dx^2}\right)^2\right]dx=0.$$

Ajoutons respectivement tous les résultats pareils relatifs aux diverses tiges, en tenant compte de toutes les conditions (90) et (90 *bis*) spéciales aux extrémités, conditions qui sont vérifiées à toute époque, et qui, pouvant être, par suite, différentiées par rapport à t, donnent, par exemple: à une extrémité fixe, $\frac{du'}{dt} = 0$, $\frac{dw'}{dt} = 0$; à une extrémité encastrée, $\frac{dw'}{dt} = 0$, $\frac{d^2 w'}{dx\,dt} = 0$; à une extrémité commune à deux tiges, $\frac{du'}{dt} = \frac{du'_1}{dt}$, $\frac{dw'}{dt} = \frac{dw'_1}{dt}$, et, si elles sont soudées, $\frac{d^2 w'}{dx\,dt} = \frac{d^2 w'_1}{dx\,dt}$. Les termes relatifs aux extrémités se réduiront à ceux qui sont affectés des masses $\mathbf{M}$ des corps entraînés par les tiges : ces termes auront respectivement les formes

$$\mathbf{M}\frac{d^2 u'}{dt^2}\frac{du'}{dt},\quad \mathbf{M}\frac{d^2 w'}{dt^2}\frac{dw'}{dt},\quad \text{ou bien}\quad \frac{1}{2}\mathbf{M}\frac{d}{dt}\left(\frac{du'}{dt}\right)^2,\quad \frac{1}{2}\mathbf{M}\frac{d}{dt}\left(\frac{dw'}{dt}\right)^2.$$

Par suite, en désignant par Σ des signes de sommation s'étendant, soit à toutes les masses $\mathbf{M}$, soit à tous les éléments dx de longueur des tiges, il viendra

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum \mathbf{M}\left(\frac{du'}{dt}\right)^2 + \sum\left(\rho'\frac{du'^2}{dt^2} + \varepsilon\,\frac{du'^2}{dx^2}\right)\sigma\,dx\right] = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum \mathbf{M}\left(\frac{dw'}{dt}\right)^2 + \sum\left[\rho'\sigma\frac{dw'^2}{dt^2} + \varepsilon \mathrm{I}\left(\frac{d^2 w'}{dx^2}\right)^2\right]dx\right\} = 0.$$

Donc les expressions entre parenthèses sont indépendantes de t, et, comme elles sont nulles pour $t = 0$ $\left(\text{à cause de } u' = 0,\ \frac{du'}{dt} = 0,\ w' = 0,\ \frac{dw'}{dt} = 0 \text{ pour } t = 0\right)$, elles le seront toujours; ce qui n'est évidemment possible que si l'on a partout séparément

$$\frac{du'}{dt} = 0,\quad \frac{du'}{dx} = 0,\quad \frac{dw'}{dt} = 0,\quad \frac{d^2 w'}{dx^2} = 0,$$

et, par suite,

$$u' = 0,\quad w' = 0.$$

Par conséquent, les déplacements u, w sont complétement déterminés, et il en est de même de ω, à cause de l'analogie des équations (89 *bis*), (89 *ter*) avec (87 *b*), (87 *c*).

Il n'entre pas dans le plan de cette étude d'intégrer les équations différentielles de ce paragraphe; on peut voir de beaux exemples de ces intégrations : 1° dans le Mémoire *sur les Ponts suspendus*, de Navier, qui étudie le choc longitudinal d'une barre verticale par un corps solide supposé lui rester fixé après le choc; 2° dans l'*Introduction à la Mécanique industrielle* (n^{os} 322 et 325, notes), de Poncelet, qui complète la solution précédente en tenant compte de ce que la barre, à l'instant du choc, n'a pas encore reçu l'allongement statique produit par le poids du corps heurtant; 3° dans le Mémoire de M. Phillips *sur les vibrations longitudinales des tiges dont les extrémités sont soumises à des mouvements donnés ou à l'action continue de forces variant suivant une loi donnée* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, février 1864); 4° dans l'Étude de M. de Saint-Venant *sur le choc longitudinal de deux barres cylindriques ou coniques tronquées* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1867, et *Comptes rendus*, 11 mai 1868); 5° dans le Mémoire de Poisson *sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, t. VIII, 1829, aux numéros de 47 à 57), et dans sa *Mécanique rationnelle* (deuxième édition, n^{os} 518 et suivants), où Poisson obtient les lois des vibrations transversales d'une tige homogène isotrope et prismatique, dont une des extrémités est libre et l'autre libre ou encastrée; 6° enfin, dans le Mémoire de M. de Saint-Venant *sur les vibrations transversales d'une barre fixée à ses extrémités et unie en son milieu à une masse étrangère qui l'a heurtée* (*Société philomathique*, 5 novembre 1853 et 21 janvier 1854, au journal *l'Institut*, n° 105, et *Comptes rendus*, 9 janvier 1865, 3 juillet 1865 et 15 janvier 1866).

§ XII. — *Étude d'une tige rectiligne soumise à une traction antérieure aux déplacements. — Vibrations des cordes en tenant compte de la rigidité.*

Nous nous sommes bornés jusqu'ici à des tiges dont tous les éléments plans n'étaient soumis par unité de surface, antérieurement aux déplacements étudiés, qu'à une pression normale et constante, telle que la pression atmosphérique. Occupons-nous actuellement des

déplacements subis par les divers points d'une corde élastique sans pesanteur, tendue entre deux appuis, et qui est écartée de cette position primitive d'équilibre par diverses forces appliquées à son intérieur ou près de ses extrémités. Si nous divisons la corde en un certain nombre de tronçons d'une longueur assez petite, et que, dans chaque tronçon, nous choisissions pour axe des x l'axe de la corde dans son état primitif d'équilibre, celle-ci pourra être assimilée à une tige où les forces élastiques N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 seraient sensiblement nulles antérieurement aux déplacements u, v, w, mais dans laquelle la traction N_1, exercée par unité de surface sur les éléments plans perpendiculaires aux x, aurait, avant les déplacements, une certaine valeur N_1^0, généralement très-grande par rapport à celles que développent de petites déformations postérieures ∂, g. L'équilibre de la corde, dans son état choisi comme primitif, exige que cette valeur N_1^0 se trouve à fort peu près indépendante de x, et même que la tension totale $\int_\sigma N_1^0 d\sigma$, que nous appellerons $\mathfrak{T}_0$, soit rigoureusement constante sur toute la longueur; mais, d'un point à l'autre d'une section σ, N_1^0 peut être variable, soit d'une manière continue, soit même brusquement sur les lignes précédemment appelées s_1.

Au § I de mon Étude sur la théorie des ondes liquides périodiques (*Savants Étrangers*, t. XX, 1871), j'ai étudié des milieux élastiques du genre d'une corde très-tendue, c'est-à-dire dans lesquels les N, T ont, antérieurement aux déplacements étudiés, des valeurs considérables. J'y ai établi les équations du mouvement [§ I, formules (3) et (3 *bis*)] qui conviennent alors. Ces équations, spécifiées pour le cas de l'équilibre, et en admettant que les dérivées premières de u, v, w en x, y, z soient très-petites et que la force N_1 ait seule une partie primitive N_1^0, supposée même indépendante de x, diffèrent peu des équations (2) du Mémoire actuel : les deux dernières restent les mêmes, mais la première est remplacée par

$$(91) \qquad \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} - \frac{dN_1^0}{dy}\frac{dv}{dx} - \frac{dN_1^0}{dz}\frac{dw}{dx} + \rho X = 0.$$

J'ai démontré aussi (note placée à la fin de la troisième Note complémentaire de ce Mémoire), que, si l'on prend des plans coordonnés

parallèles, dans l'état primitif du milieu, aux trois éléments plans matériels rectangulaires qui se croisent en un point M et sur lesquels les actions N_1^0, N_2^0, N_3^0, exercées par unité de surface, dans l'état primitif du milieu, sont normales, et si, en outre, on appelle N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 les composantes, suivant les axes, des petites forces élastiques qui viennent se joindre à ces composantes normales N_1^0, N_2^0, N_3^0 pour donner, après les déplacements u, v, w, les vrais forces élastiques exercées sur l'unité de surface primitive de ces mêmes éléments plans, les composantes N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 des forces exercées sur l'unité actuelle de surface des éléments plans perpendiculaires, apres les déplacements, aux axes fixes des x, y, z, auront pour expressions

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned} N_1 &= N_1^0\left(1-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)+N'_1,\\ N_2 &= N_2^0\left(1-\frac{dw}{dz}-\frac{du}{dx}\right)+N'_2,\\ N_3 &= N_3^0\left(1-\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)+N'_3;\\ T_1 &= N_2^0\frac{dw}{dy}+N_3^0\frac{dv}{dz}+T'_1,\\ T_2 &= N_3^0\frac{du}{dz}+N_1^0\frac{dw}{dx}+T'_2,\\ T_3 &= N_1^0\frac{dv}{dx}+N_2^0\frac{du}{dy}+T'_3. \end{aligned}\right.$$

Ces valeurs, dans lesquelles il faut faire $N_2^0 = N_3^0 = 0$, changent la relation (91) et les deux dernières (2), en celles-ci

$$(91\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dN'_1}{dx}+\frac{dT'_3}{dy}+\frac{dT'_2}{dz}+\rho X = 0,\\ &N_1^0\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dT'_3}{dx}+\rho Y+\frac{dN'_2}{dy}+\frac{dT'_1}{dz} = 0,\\ &N_1^0\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{dT'_2}{dx}+\rho Z+\frac{dT'_1}{dy}+\frac{dN'_3}{dz} = 0. \end{aligned}\right.$$

Voyons actuellement ce que deviennent les conditions spéciales (3), appliquées au contour s et aux lignes s_1 d'une section. Les cosinus m, n, p sont ceux des angles que fait avec les axes, après les déplacements, la normale à un élément d'une de ces lignes et à la fibre longi-

tudinale de la tige qui passe par son pied. Or, cette fibre, primitivement parallèle aux x, fait avec les axes des angles ayant pour cosinus 1, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$: la condition correspondante de perpendicularité est donc

$$(93)\qquad m + n\frac{dv}{dx} + p\frac{dw}{dx} = 0, \quad \text{d'où} \quad m = -n\frac{dv}{dx} - p\frac{dw}{dx}.$$

Par suite, les composantes p_x, p_y, p_z de la force exercée sur l'unité de surface d'un des éléments plans qui séparent la tige de l'espace environnant, ou deux parties de la tige de constitution différente, seront

$$n\left(T_3 - N_1\frac{dv}{dx}\right) + p\left(T_2 - N_1\frac{dw}{dx}\right),$$
$$n\left(N_2 - T_3\frac{dv}{dx}\right) + p\left(T_1 - T_3\frac{dw}{dx}\right),$$
$$n\left(T_1 - T_2\frac{dv}{dx}\right) + p\left(N_3 - T_2\frac{dw}{dx}\right),$$

ou bien, d'après (92), et en observant que n, p, facteurs des petites quantités T'_3, T'_2, N'_2, T'_1, N'_3, peuvent être remplacés par leurs valeurs primitives $\frac{dz}{ds}$, $-\frac{dy}{ds}$,

$$T'_3\frac{dz}{ds} - T'_2\frac{dy}{ds}, \quad N'_2\frac{dz}{ds} - T'_1\frac{dy}{ds}, \quad T'_1\frac{dz}{ds} - N'_3\frac{dy}{ds}.$$

Donc les conditions spéciales aux lignes s et s_1 sont les mêmes que celles du § III, dans lesquelles on remplacerait N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 par N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3. Les considérations qui suivent la formule (15) serviraient de même à établir que ces quantités sont très-petites par rapport à leurs dérivées premières en y, z; toutes les fonctions que l'on peut avoir à étudier doivent être au moins de l'ordre de grandeur de leurs dérivées en x, excepté peut-être aux extrémités de la tige. De plus, les deux dernières équations (91 *bis*) se réduiront, comme les deux dernières (2), à la forme

$$(94)\qquad \frac{dN'_2}{dy} + \frac{dT'_1}{dz} = 0, \quad \frac{dT'_1}{dy} + \frac{dN'_3}{dz} = 0 :$$

car, ou bien la corde étudiée est douée d'une rigidité appréciable,

et alors, les termes ρY, ρZ, $N_1^0 \frac{d^2v}{dx^2}$, $N_1^0 \frac{d^2w}{dx^2}$ n'étant pas extrêmement supérieurs à $\frac{dT'_3}{dx}$, $\frac{dT'_2}{dx}$, on peut raisonner sur ces deux équations (91 *bis*) comme on l'a fait sur les deux dernières (2); ou bien elle est sans rigidité sensible, c'est-à-dire qu'on peut faire

$$T'_3 = T'_2 = 0, \quad N'_3 = N'_2 = T'_1 = 0,$$

et alors rien n'empêche de poser les formules (94).

Les trois équations indéfinies exprimant l'équilibre auront ainsi précisément les mêmes formes qu'au § III, mais elles contiendront, au lieu de N, T, les forces N′, T′, que les déformations δ, g auront développées, en sus des composantes normales et primitives N_1^0, 0, 0, sur l'unité de surface primitive des éléments plans qui étaient d'abord perpendiculaires aux axes des x, y, z. Ces forces N′, T′ sont des fonctions linéaires, sans termes constants, des δ, g, et les δ, g des fonctions pareilles des N′, T′, que les raisonnements du § II permettraient de mettre, dans le cas où le milieu offrirait, soit un plan de symétrie de contexture, soit un axe d'élasticité, sous les formes (9), (10), (10 *bis*). De plus, l'expression (12), en y remplaçant les N, T par les N′, T′, serait celle du travail exécuté par ces forces dans la déformation d'un élément de volume primitivement rectangulaire et égal à $dx\,dy\,dz$, au moins dans l'hypothèse où les u, v, w, et par suite, les δ, g conserveraient entre eux les mêmes rapports pendant toute la durée de cette déformation. Cette expression doit être positive, car il est naturel d'admettre que les forces intérieures développées pendant qu'on écarte un corps de sa position d'équilibre stable choisie pour état primitif, s'opposent à cet écart.

Toutes les formules des §§ I, II, III et celles des autres paragraphes qui en résultent, s'appliquent donc au problème actuel, à cela près que les N, T devront y être remplacés par les N′, T′, et que les coefficients d'élasticité, E et $\mathcal{E}$ par exemple, seront relatifs à l'état où se trouve la tige sous l'action de la tension $\mathfrak{N}_0$, et non à l'état naturel dans lequel cette tension n'existait pas. Mais les formules (32), (32 *bis*) et (33), qui n'ont pas été déduites de celles des §§ I, II, III, ont besoin d'un examen spécial.

Pour cela, supposons d'abord qu'on ait marqué, sur les diverses sections normales et antérieurement aux déplacements u, v, w, les centres des forces parallèles $N_1^0\,d\sigma$ appliquées à tous les éléments $d\sigma$ de chacune, et appelons y_0, z_0 leurs coordonnées transversales, sensiblement indépendantes de x, par rapport aux axes des y et des z précédemment choisis, c'est-à-dire tels que $\int_\sigma \mathrm{E}y\,d\sigma = \int_\sigma \mathrm{E}z\,d\sigma = 0$, $\int_\sigma \mathrm{E}yz\,d\sigma = 0$. On aura ainsi

$$y_0 \int_\sigma N_1^0\,d\sigma \quad \text{ou} \quad y_0\,\mathfrak{N}_0 = \int_\sigma N_1^0\,y\,d\sigma, \quad z_0\,\mathfrak{N}_0 = \int_\sigma N_1^0\,z\,d\sigma.$$

L'ensemble des points matériels dont les coordonnées primitives transversales sont y_0, z_0 est une fibre longitudinale à laquelle on peut supposer appliquées les tensions $\mathfrak{N}_0$. L'équilibre de la tige dans son état primitif exige évidemment que cette fibre soit rigoureusement droite, tandis que, si la tige n'a pas toutes ses sections normales exactement pareilles, son axe, lieu des centres de gravité des sections, peut n'être pas absolument rectiligne. C'est pour cela que nous n'avons adopté cet axe, dans sa position primitive, pour celui des x, que sur une certaine longueur assez petite de la tige.

Concevons actuellement que l'on mène, après les déplacements u, v, w et par un point matériel O' de l'axe de la tige, dont les coordonnées primitives sont x, 0, 0, une section perpendiculaire aux x, et cherchons la résultante et le centre des forces normales $N_1^0\left(1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right)$, appliquées, par unité de surface, à ses divers éléments plans. Cette résultante est égale à $\mathfrak{N}_0$ comme avant les déplacements. En effet, chacun des éléments plans de la section considérée est l'intersection d'un faisceau infiniment petit de fibres longitudinales par un plan presque normal à ces fibres, et peut être confondu, sauf erreur relative du second ordre de petitesse, avec l'intersection du même faisceau de fibres par la section, primitivement normale à l'axe de la tige et actuellement très-peu inclinée sur ce faisceau, qui est menée par le même point matériel; or cette dernière intersection est égale au produit de sa valeur primitive $d\sigma$ par l'unité augmentée de la dilatation superficielle $\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ des éléments plans primitivement nor-

maux aux x. La résultante cherchée a donc pour expression

$$\int_\sigma N_1^0 \left(1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right)\left(1 + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) d\sigma = \int_\sigma N_1^0\, d\sigma = \mathcal{N}_0.$$

Chechons maintenant le point d'application de cette résultante, ou plutôt ses deux moments par rapport à deux axes parallèles aux y et aux z, menés par le point O'. Ces deux moments sont égaux, pour chaque partie $N_1^0\, d\sigma$ de la force $\mathcal{N}_0$, aux produits de $N_1^0\, d\sigma$ et de $-N_1^0\, d\sigma$ par l'excès des coordonnées respectives, suivant les z et suivant les y, du point d'application de cette partie de $\mathcal{N}_0$ sur les coordonnées pareilles de O'. Comme les portions de fibres longitudinales comprises entre la section considérée et la section primitivement normale menée par O' sont très-petites et presque parallèles aux x, les coordonnées suivant les y et suivant les z de ces points d'application peuvent être remplacées, sauf erreur du second ordre de petitesse, par $z + w$, $y + v$, qui sont celles des points correspondants de la section normale menée par O'. Les coordonnées pareilles du point O', situé sur l'axe de la tige, se réduisent d'ailleurs à ses déplacements transversaux, que nous représenterons par v_a, w_a. Les moments cherchés de $N_1^0\, d\sigma$ seront donc $N_1^0\, d\sigma(z + w - w_a)$, $-N_1^0\, d\sigma(y + v - v_a)$, et ceux de la force totale $\mathcal{N}_0$ vaudront par suite

$$(95)\quad \mathcal{N}_0 z_0 + \int_\sigma N_1^0 (w - w_a)\, d\sigma \quad \text{et} \quad -\mathcal{N}_0 y_0 - \int_\sigma N_1^0 (v - v_a)\, d\sigma.$$

Cela posé, menons comme au § V [*], par le point de l'axe dont les coordonnées primitives sont x, o, o, non-seulement les deux axes, parallèles à ceux des y et des z, dont il vient d'être parlé, mais encore un premier axe parallèle aux x, et supposons qu'on donne les composantes totales $\mathcal{N}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$ et les moments totaux M, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, par rapport à ces axes, de toutes les actions extérieures exercées sur la partie de la tige située au delà du plan des deux derniers : nous pourrons les égaler aux composantes et aux moments pareils des forces exercées sur la masse d'un tronçon compris entre ce plan et une autre section parallèle assez voisine, dont la distance à la première sera désignée par $x' - x$, et de celles qui le sont sur cette seconde section. Les for-

[*] Voir après les formules (31).

mules (32) et (32 *bis*) devront être modifiées; car, N_1 ayant sa première partie $N_1^0\left(1-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)$ considérable, les coordonnées actuelles des points de cette seconde section par rapport aux axes menés par O', et les éléments plans actuels de cette section ne pourront plus, dans les termes affectés de cette partie de N_1, être remplacés par leurs valeurs primitives $x'-x$, y, z, $d\sigma$. Mais, d'après les considérations précédentes, cette partie de N_1 équivaut à une force $\mathfrak{N}_0$, parallèle aux x, et dont il sera facile d'obtenir les moments par rapport aux axes transversaux menés par O'. Concevons, en effet, que la seconde section, d'abord confondue avec la première, reprenne ensuite sa vraie place en s'en écartant à la distance $x'-x$: les moments cherchés, d'abord égaux, d'après (95), à

$$\left[\mathfrak{N}_0 z_0+\int_\sigma N_1^0(w-w_a)\,d\sigma\right]_x,\quad -\left[\mathfrak{N}_0 y_0+\int_\sigma N_1^0(v-v_a)\,d\sigma\right]_x,$$

varieront, parce que le point d'application de chaque partie constante $N_1^0\,d\sigma$ de la force totale $\mathfrak{N}_0$ s'écartera de la première section en suivant une fibre longitudinale primitivement parallèle aux x. Dans ce mouvement, les coordonnées transversales de ce point croissent sensiblement de $\int_x^{x'}\frac{dv}{dx}dx$ et de $\int_x^{x'}\frac{dw}{dx}dx$, et l'augmentation des deux moments de $N_1^0\,d\sigma$ sera

$$N_1^0\,d\sigma\int_x^{x'}\frac{dw}{dx}dx,\quad -N_1^0\,d\sigma\int_x^{x'}\frac{dv}{dx}dx,$$

ou bien, en faisant passer sous le signe $\int$ le facteur constant $N_1^0\,d\sigma$,

$$\int_x^{x'}\left(N_1^0\frac{dw}{dx}d\sigma\right)dx,\quad -\int_x^{x'}\left(N_1^0\frac{dv}{dx}d\sigma\right)dx.$$

Si l'on fait la somme des quantités pareilles pour tous les éléments $d\sigma$, et qu'on ajoute les valeurs qu'ont, pour $x'=x$, les moments cherchés, on trouve, pour ces moments,

$$\left[\mathfrak{N}_0 z_0+\int_\sigma N_1^0(w-w_a)\,d\sigma\right]_x+\int_x^{x'}dx\int_\sigma N_1^0\frac{dw}{dx}d\sigma,$$

$$-\left[\mathfrak{N}_0 y_0+\int_\sigma N_1^0(v-v_a)\,d\sigma\right]_x-\int_x^{x'}dx\int_\sigma N_1^0\frac{dv}{dx}d\sigma.$$

Les formules (32) et (32 *bis*), en y tenant compte en outre de la seconde partie N'_1 de N_1, en y remplaçant T_3, T_2 par $N_1^0 \frac{dv}{dx} + T'_3$, $N_1^0 \frac{dw}{dx} + T'_2$, et faisant passer dans les premiers membres les termes affectés de $\mathcal{N}_0$, N_1^0, deviendront

$$
(96)\left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{N} - \mathcal{N}_0 = \int_\sigma N'_1\, d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho X\, d\sigma,\\
&\mathcal{F}_1 - \int_\sigma N_1^0 \frac{dv}{dx}\, d\sigma = \int_\sigma T'_3\, d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho Y\, d\sigma,\\
&\mathcal{F} - \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx}\, d\sigma = \int_\sigma T'_2\, d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho Z\, d\sigma.\\
&\mathrm{M} - \int_\sigma N_1^0 \left(y \frac{dw}{dx} - z \frac{dv}{dx} \right) d\sigma\\
&\qquad = \int_\sigma (y T'_2 - z T'_3)\, d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho (yZ - zY)\, d\sigma,\\
&\mathfrak{M} - \left[\mathcal{N}_0 z_0 + \int_\sigma N_1^0 (w - w_a)\, d\sigma \right]_x\\
&\qquad - \int_x^{x'} dx \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx}\, d\sigma + (x' - x) \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx}\, d\sigma\\
&\qquad = \int_\sigma [z N'_1 - (x' - x) T'_2]\, d\sigma + \int_x^{x'} dx' \int_\sigma \rho [zX - (x' - x) Z]\, d\sigma,\\
&- \mathfrak{M}_1 - \left[\mathcal{N}_0 y_0 + \int_\sigma N_1^0 (v - v_a)\, d\sigma \right]_x\\
&\qquad - \int_x^{x'} dx' \int_\sigma N_1^0 \frac{dv}{dx}\, d\sigma + (x' - x) \int_\sigma N_1^0 \frac{dv}{dx}\, d\sigma\\
&\qquad = \int_\sigma [y N'_1 - (x' - x) T'_3]\, d\sigma + \int_x^{x'} dx' \int_\sigma \rho [yX - (x' - x) Y]\, d\sigma.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces relations diffèrent de (32), (32 *bis*), en ce que les N, T sont remplacés par les N′, T′, et $\mathcal{N}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$, M, $\mathfrak{M}$, $-\mathfrak{M}_1$, par les premiers membres de (96). Si, dans la première et dans les deux dernières, on remplace N'_1 par sa valeur $E\partial_x$, et qu'on opère comme on l'a fait pour obtenir les formules (33), ces trois relations et la quatrième (96) don-

neront, au lieu des quatre (33),

(97)
$$\begin{cases}
\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_0 = (\mathcal{A}\mathcal{E}\sigma)_{x'} + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho X d\sigma, \\
\mathfrak{M} - \left[\mathfrak{N}_0 z_0 + \int_\sigma N_1^0 (w - w_a) d\sigma\right]_x \\
\quad = (\mathcal{B}\mathcal{E}I)_{x'} + \int_x^{x'} \left[-\mathcal{F} + \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx} d\sigma \right. \\
\qquad \left. + \int_\sigma \rho z X d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho Z d\sigma \right] dx, \\
-\mathfrak{M}_1 - \left[\mathfrak{N}_0 y_0 + \int_\sigma N_1^0 (v - v_a) d\sigma\right]_x \\
\quad = (\mathcal{B}_1 \mathcal{E} I')_{x'} + \int_x^{x'} \left[-\mathcal{F}_1 + \int_\sigma N_1^0 \frac{dv}{dx} d\sigma \right. \\
\qquad \left. + \int_\sigma \rho y X d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho Y d\sigma \right] dx, \\
M = \left[\int_\sigma N_1^0 \left(y \frac{dw}{dx} - z \frac{dv}{dx} \right) d\sigma + \int_\sigma (y T_2 - z T_3) d\sigma \right]_{x'} \\
\qquad + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho (yZ - zY) d\sigma;
\end{cases}$$

[dans ces formules, la notation $(\quad)_{x'}$ indique que l'expression entre parenthèses est prise pour l'abscisse x'].

Telles sont les quatre équations qui serviront à déterminer $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, K, et par suite les N′, T′ et les déformations ∂, g. Quant à la seconde et à la troisième (96), on verra, absolument comme au § V, qu'elles résultent de la seconde et de la troisième (97), combinées avec la première (91 *bis*) et avec les deux conditions correspondantes spéciales aux lignes s, s_1.

Nous ne continuerons pas cette étude, qui nous ramènerait, avec certaines modifications, les problèmes étudiés aux paragraphes précédents. Nous chercherons seulement ce que deviennent les équations (85 *bis*) et (88), qui régissent l'équilibre et le mouvement transversal d'une tige rectiligne, soumise à des forces parallèles à un des axes principaux d'inertie de ses sections normales.

Nous prendrons des axes des x, y, z qui soient les mêmes sur toute

l'étendue de la tige, et néanmoins parallèles à ceux que nous avons adoptés précédemment pour les divers tronçons en lesquels on peut la concevoir divisée : ce sera possible si la tige n'est pas torse, c'est-à-dire si les axes d'inertie principaux de toutes ses sections normales ont à peu près les mêmes directions. L'axe des x choisi sera la position primitive de la fibre à laquelle sont appliquées les tensions $\mathfrak{N}_0$: d'où il suit que les origines des axes fixes précédemment adoptés pour les divers tronçons auront leurs coordonnées transversales par rapport aux nouveaux axes égales à $-y_0$, $-z_0$. Les déformations ∂, g, les déplacements u, v, w et leurs dérivées en x, y, z, auront les mêmes valeurs dans le nouveau système d'axes que dans les précédents, puisque tous ces systèmes sont supposés fixes et sensiblement parallèles.

Dans l'identité $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{d\partial_x}{dz} + \frac{dg_{zx}}{dx}$, on pourra négliger encore le dernier terme, à côté du second qui est égal à $-\mathfrak{B}$. En effet ce dernier terme est au plus comparable à g_{zx}, ou à $\frac{1}{\varepsilon}T'_2$, ou enfin à la valeur moyenne de $\frac{1}{\varepsilon}T'_2$, laquelle, d'après la troisième relation (96) et en faisant, dans cette relation, $x' = x$, est $\frac{1}{\varepsilon\sigma}\left(\mathfrak{F} - \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx} d\sigma\right)$; or la seconde formule (97) montre que $\mathfrak{F} - \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx} d\sigma$ est de l'ordre de $\frac{d(\mathfrak{B}\varepsilon I)}{dx}$, et, par suite, que $\mathfrak{B}\varepsilon I$ est au moins du même ordre; donc $\mathfrak{B}$ est comparable à $\frac{1}{\varepsilon I}\left(\mathfrak{F} - \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx} d\sigma\right)$, ou à $\frac{\sigma}{I} g_{zx}$, et très-grand en comparaison de g_{zx}, car le rapport $\frac{I}{\sigma}$ est de l'ordre du carré des dimensions transversales, dans le sens des z, de la section σ. Par conséquent, en supposant toujours $x' = x$, on pourra écrire, d'après la seconde (97),

$$(98) \qquad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\mathfrak{B} = \frac{1}{\varepsilon I}\left[-\mathfrak{M} + \mathfrak{N}_0 z_0 + \int_\sigma N_1^0 (w - w_a) d\sigma\right].$$

$\mathfrak{M}$ désigne le moment total des forces extérieures appliquées à toute la partie de la tige située au delà de l'abscisse x, par rapport à un axe

mené, parallèlement à celui des y, par le point O' de l'axe de la tige, dont les coordonnées transversales primitives, dans le nouveau système d'axes, sont $-y_0$; $-z_0$, et dont les déplacements pareils sont les quantités précédemment appelées v_a, w_a. Ce moment comprend un terme de plus que dans le cas d'une tige non tendue; car, si l'on considère une section $x = x_1$, perpendiculaire aux x et très-voisine de la seconde extrémité de la tige, les forces appliquées à cette section n'équivaudront plus à un simple couple $\mathfrak{M}'$, situé dans le plan des zx, et à une simple force $\mathcal{F}'$, parallèle aux z et appliquée au point où l'axe de la tige coupe cette section; mais elles auront en outre une composante parallèle aux x, appliquée au même point. La valeur de cette composante, $\int_\sigma \mathrm{N}_1^0 d\sigma + \int_\sigma \mathrm{N}'_1 d\sigma$, n'est autre que $\mathfrak{T}_0$; car, les déplacements de l'axe de la tige n'étant supposés que transversaux, on a partout $u = 0$, et par suite $\int_\sigma \mathrm{N}'_1 d\sigma = 0$. La coordonnée actuelle suivant les z du point quelconque O' de l'axe est $-z_0 + w_a$, et celle du point de cet axe, très-voisin de la seconde extrémité, où est supposée appliquée la force $\mathfrak{T}_0$, $(-z_0 + w_a)_{x_1}$, en exprimant par $(\ \ )_{x_1}$, que la quantité entre parenthèses est prise pour $x = x_1$. Par suite, le moment de $\mathfrak{T}_0$ par rapport à un axe parallèle aux y et mené par O' vaut $\mathfrak{T}_0[(-z_0 + w_a)_{x_1} + z_0 - w_a]$: c'est le terme qui devra être joint aux expressions de $\mathfrak{M}$ obtenues pour le cas d'une tige non tendue. Le second membre de (98) montre que le numérateur de l'expression de $\frac{d^2 w}{dx^2}$ comprendra de plus que dans ce cas, outre le terme précédent changé de signe, les deux termes $\mathfrak{T}_0 z_0$ et $+\int_\sigma \mathrm{N}_1^0 (w - w_a) d\sigma$. Les formules (85 *bis*) et (88) devront donc être remplacées par celles-ci :

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned} \int_x^{x_1} \rho' \mathrm{Z}_0 \sigma (x' - x) dx' &= \mathfrak{M}' - \mathfrak{T}_0 (z_0 - w_a)_{x_1} - \mathcal{F}'(x_1 - x) \\ &\qquad - \mathfrak{T}_0 w_a - \int_\sigma \mathrm{N}_1^0 (w - w_a) d\sigma + \varepsilon \mathrm{I} \frac{d^2 w}{dx^2}, \\ -\int_x^{x_1} \rho' \frac{d^2 w}{dt^2} \sigma (x' - x) dx' &= \text{le même second membre.} \end{aligned}\right.$$

Rappelons que la tension $\mathfrak{T}_0$ n'est pas supposée tellement grande

que son effet masque entièrement celui de la rigidité; donc le dernier terme, qui représente l'action de la rigidité, n'est pas négligeable. Mais l'avant-dernier l'est en comparaison du précédent $-\mathfrak{N}_0 w_a$, car la différence $w - w_a$, sur toute l'étendue d'une section, est évidemment insensible par rapport à w_a, tandis que, d'autre part, $\int_\sigma N_1^0 d\sigma = \mathfrak{N}_0$. On pourra de même remplacer w_a par w, et, si l'on pose enfin $\mathfrak{M}' - \mathfrak{N}_0(z_0)_{x_1} = \mathfrak{M}''$, les relations (99) auront la forme suivante, presque aussi simple que (85 *bis*) et (88) :

$$(99\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_x^{x_1} \rho' Z_0 \sigma(x'-x)dx' \\ &\qquad = \mathfrak{M}'' - \mathfrak{F}'(x_1 - x) - \mathfrak{N}_0(w - w_{x_1}) + \mathcal{E}I\frac{d^2w}{dx^2}, \\ &-\int_x^{x_1} \rho' \frac{d^2w}{dt^2}\sigma(x'-x)dx' = \text{le même second membre.} \end{aligned}\right.$$

On les aurait trouvées directement sous cette forme simple, si la tension longitudinale $\mathfrak{N}_0$, qui a écarté le corps de son état naturel, n'avait produit, antérieurement aux déplacements transversaux actuellement étudiés, que des dilatations ∂_x de l'ordre de celles que j'ai considérées au paragraphe précédent : les points d'application des tensions $\mathfrak{N}_0$ se seraient alors trouvés tout le long de l'axe même de la tige, c'est-à-dire qu'on aurait eu partout $y_0 = z_0 = 0$, et il aurait suffi d'employer la première formule (87), en tenant compte, dans l'expression de $\mathfrak{M}$, du moment $\mathfrak{N}_0[(w_a)_{x_1} - w_a]$ de la force $\mathfrak{N}_0$, exercée, dans le sens des x, sur la seconde extrémité de l'axe de la tige.

On pourrait appliquer la seconde équation (99 *bis*) à l'étude du mouvement transversal, en faisant sur les extrémités les mêmes hypothèses qu'au paragraphe précédent. Mais je me bornerai au simple cas d'une corde constituée pareillement sur toute sa longueur, fixée à ses deux bouts, et vibrant dans sa totalité sans qu'il se produise aucun nœud intermédiaire. La formule (99 *bis*), différentiée deux fois en x, donne alors pour équation indéfinie

$$(100)\qquad \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{1}{\rho'\sigma}\left(\mathfrak{N}_0\frac{d^2w}{dx^2} - \mathcal{E}I\frac{d^4w}{dx^4}\right).$$

Une corde n'ayant qu'une petite rigidité, le dernier terme de cette équation est bien moins grand que le précédent, et peut se calculer en supposant à w la même expression que si la corde était parfaitement flexible. Or, si l désigne la longueur de la corde, i un nombre entier positif quelconque, L, L' des coefficients arbitraires, Ω la quantité $\sqrt{\frac{\mathcal{T}_0}{\rho'\sigma}}$, on sait que cette expression approchée est

$$w = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin\frac{i\pi(x-x_0)}{l}\left[\mathrm{L}\cos\frac{i\pi\Omega t}{l} + \mathrm{L}'\sin\frac{i\pi\Omega t}{l}\right].$$

Différentions-la quatre fois par rapport à x, et observons qu'elle se réduit presque aux deux termes correspondant à $i=1$, comme dans toute corde qui vibre dans sa totalité et dont le son fondamental a seul une intensité notable; nous trouverons $\frac{d^4w}{dx^4} = -\frac{\pi^2}{l^2}\frac{d^2w}{dx^2}$, et l'équation (100) deviendra

$$(100\ bis) \qquad \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{1}{\rho'\sigma}\left(\mathcal{T}_0 + \mathcal{E}\mathrm{I}\frac{\pi^2}{l^2}\right)\frac{d^2w}{dx^2};$$

c'est celle du mouvement transversal de la même corde supposée parfaitement flexible, mais dont la tension, au lieu d'être $\mathcal{T}_0$, serait $\mathcal{T}_0 + \mathcal{E}\mathrm{I}\frac{\pi^2}{l^2}$.

Donc, *lorsqu'une corde, douée de rigidité, vibre transversalement dans un plan perpendiculaire à un axe principal d'inertie de ses sections normales, ces vibrations se font à fort peu près comme si la corde était parfaitement flexible, et que sa tension fût supérieure à la tension vraie d'une quantité égale au produit du carré du nombre* π *par le carré de l'inverse de la longueur et par le moment d'inertie d'une section autour de cet axe, moment obtenu en supposant à chaque élément des sections normales une densité superficielle égale au coefficient d'élasticité de la fibre longitudinale qui y passe.*

Si la tension ne varie pas dans des limites assez larges pour changer beaucoup la constitution et par suite le coefficient d'élasticité des fibres, cette quantité est constante, et *la rigidité équivaut, pour une*

même corde, à un accroissement constant de tension, ainsi que l'ont établi des expériences de Savart. Cette loi pourra même être vraie, à condition toutefois que la variation de l'étendue des sections reste fort petite, pour des tensions allant presque jusqu'à celles qui produisent la rupture; car des expériences nombreuses et faites dans des conditions très-variées, dues à Coulomb, Leslie, Gerstner, etc., ont permis d'établir un principe, connu sous le nom de *loi de Gerstner,* et consistant en ce que le coefficient d'élasticité d'un fil ou d'une barre change peu, quand sa contexture est altérée par des tensions très-grandes, pourvu que sa densité ne diminue pas sensiblement.

Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SECOND MÉMOIRE.

DES PLAQUES PLANES.

Le but de ce Mémoire est d'établir rigoureusement, en partant des formules de la théorie de l'élasticité, les équations générales de l'équilibre et du mouvement des plaques planes très-minces, et aussi de résoudre une difficulté, provenant de la différence qui existe entre des conditions aux limites dûes à Poisson (*Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, aux *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII, 1829, p. 538), et d'autres dues à M. Kirchhoft (*Journal de Crelle*, t. 40, 1850, p. 51).

Poisson et Cauchy ont tiré les premiers, des formules générales de l'élasticité, celles de l'équilibre et du mouvement d'une plaque plane, dans le cas particulier où cette plaque, homogène et isotrope, ne supporte sur ses bases aucune pression autre que celle de l'atmosphère, antérieure aux déformations étudiées; mais ce n'a été qu'au moyen d'une hypothèse, consistant à admettre que les forces élastiques y sont développables en séries très-convergentes suivant les puissances ascendantes de la petite coordonnée transversale, de manière qu'on puisse ne conserver dans toute relation qu'un seul terme ou au plus les deux termes des degrés les moins élevés. Cette hypothèse, certainement fausse lorsque la plaque comprend des couches de nature différente bien que contiguës, est suffisamment exacte dans le cas d'une plaque homogène. Elle a toutefois, même dans ce cas, le tort d'être seulement vraisemblable et non évidente. Aussi M. Kirchhoff a-t-il préféré, dans le Mémoire cité plus haut, admettre, comme avait précédemment fait Navier (*Société Philomathique*, 1821), que les petites

droites primitivement normales aux couches leur restent normales malgré les déformations éprouvées. Quand les plaques sont isotropes comme celles qu'étudie M. Kirchhoff, et plus généralement toutes les fois que leurs bases sont des plans de symétrie de contexture, cette nouvelle hypothèse est suffisamment exacte, car elle revient à supposer que les actions tangentielles exercées par les couches les unes sur les autres sont négligeables en comparaison d'autres forces élastiques développées dans le milieu; en effet, ces actions ne dépendent alors que de l'inclinaison prise sur les plans des couches par les droites qui leur étaient primitivement normales, et leur petitesse relative, dont je démontre la réalité, entraîne celle de l'inclinaison considérée. Mais, lorsque la contexture est quelconque, les mêmes actions restent très-petites sans que l'inclinaison des normales primitives sur les couches soit d'un ordre de grandeur moindre que les autres déformations éprouvées par le milieu; ce qui montre que l'hypothèse de M. Kirchhoff, en défaut dans ce cas, ne peut être admise dans aucun, à moins d'être préalablement démontrée. Enfin, M. Gerhing, disciple de ce grand physicien-géomètre, a essayé [*], sur l'indication de son maître, de traiter sans aucune hypothèse douteuse la théorie des plaques homogènes et de contexture symétrique par rapport à trois plans rectangulaires dont l'un est supposé parallèle à leurs bases; mais il s'est appuyé sur des considérations cinématiques pareilles à celles dont M. Kirchhoff s'était déjà servi dans l'étude des tiges minces, considérations qui manquent de rigueur, comme je pense l'avoir établi dans le Mémoire précédent.

J'ai quelque espoir d'avoir été plus heureux, tout en ayant traité la question à un point de vue très-général. Je m'occupe de plaques dont les feuillets ou couches superposées peuvent être d'une nature différente, variable en leurs divers points, et d'une contexture absolument quelconque. Des équations connues de l'équilibre des corps élastiques, et en admettant qu'une des bases de la plaque ne soit soumise à aucune action autre que le pression atmosphérique antérieure aux déplacements, je déduis les expressions, sous forme d'intégrales

[*] Dans sa Thèse *De æquationibus differentialibus quibus æquilibrium et motus laminæ cristallinæ definiuntur, dissertatio inauguralis.* On peut voir aussi cette analyse de M. Gerhing dans la *Theorie der Elasticität fester Cörper* de M. Clebsch.

définies, des trois composantes suivant les axes de la force élastique exercée sur les éléments plans parallèles aux bases : ces expressions montrent que les deux composantes qui sont tangentielles ont des valeurs très-petites par rapport à celles d'autres forces élastiques, et que la troisième est encore d'un ordre de petitesse supérieur, circonstances qui permettent de les transformer de manière à n'y laisser paraître aucun autre déplacement que ceux de la couche moyenne. Les équations indéfinies de l'équilibre s'obtiennent en exprimant que ces forces deviennent égales, sur la seconde base de la plaque, aux composantes pareilles et connues de l'action extérieure qui s'y trouve exercée par unité de surface. On les étendrait facilement au cas où la première base serait soumise, comme la seconde, à des pressions données; car l'état de la plaque résulterait alors de la superposition de deux états, dans chacun desquels une des deux bases ne supporterait aucune action.

Les conditions spéciales au contour sont au nombre de quatre. Elles reviennent à dire que l'action totale extérieure, exercée sur une bande du cylindre contournant comprise entre deux génératrices infiniment voisines, équivaut statiquement à trois forces, dirigées suivant trois droites fixes, et à un couple, perpendiculaire au contour, dont les expressions sont données par la théorie en fonction des déplacements des points de la couche moyenne qui se trouvent voisins de ce cylindre. En effet, si l'on mène, par un point de l'une des génératrices considérées, trois axes rectangulaires tels que le premier soit normal au cylindre et le second dans le sens de la largeur ds de la bande, et si l'on prend les composantes totales et les moments totaux, par rapport à ces axes, des forces extérieures appliquées à la bande, le dernier des trois moments sera de l'ordre de ds^2, c'est-à-dire négligeable; et ces forces équivaudront statiquement à trois composantes $F_n\,ds$, $F_s\,ds$, $F_z\,ds$, appliquées respectivement le long des trois axes, à un couple $M_s\,ds$, normal à l'élément ds du contour de la plaque, et à un second couple $-M_n\,ds$ parallèle à la bande même. Ce dernier peut être supposé composé de deux forces, M_n, $-M_n$, de sens contraire, appliquées le long des deux génératrices qui passent par les extrémités de l'élément ds. Si l'on conçoit une série de bandes contiguës du cylindre contournant séparées par des génératrices infiniment voisines,

les couples tels que $-\mathrm{M}_n ds$ seront ainsi remplacés, sur chacune de celles-ci, par deux forces $-\mathrm{M}_n$ et $\mathrm{M}_n + \frac{d\mathrm{M}_n}{ds}ds$, qui auront, à cause de la solidarité des bandes, une résultante égale à $\frac{d\mathrm{M}_n}{ds}ds$. Cette résultante devra être jointe à la force $\mathrm{F}_z ds$, qui est de même sens, et l'action totale exercée sur une bande du cylindre contournant sera bien réduite, par unité de longueur du contour, aux trois composantes F_n, F_s, $\mathrm{F}_z + \frac{d\mathrm{M}_n}{ds}$ et au couple M_s, normal au contour.

Poisson, ayant négligé de remplacer les couples parallèles au cylindre contournant par des forces dirigées suivant les génératrices de ce cylindre, et de fondre, par suite, leur effet dans celui de la composante F_z, les a regardés comme représentant un mode d'action distinct exercé sur chaque bande; ce qui lui a donné une condition de trop. M. Kirchhoff a trouvé le premier les vraies conditions au contour; il s'est servi pour cela d'une analyse rigoureuse, basée sur le calcul des variations, mais qui présente l'inconvénient de ne pas éclairer assez l'esprit en ce qu'elle ne montre pas le sens géométrique des conclusions auxquelles elle conduit, et qui d'ailleurs ne pourrait pas s'appliquer si les forces élastiques n'avaient point de potentiel, c'est-à-dire n'étaient pas les dérivées partielles d'une même fonction par rapport à six variables dont elles dépendent. Or il est douteux qu'à part les cas des milieux isotropes et des corps assez voisins du zéro absolu de température pour qu'on puisse y supposer l'amplitude des vibrations calorifiques très-petite par rapport aux intervalles moléculaires, les forces élastiques aient un potentiel. La méthode des variations, dont M. Gerhing, en se basant sur ce qu'elle avait pu seule donner les conditions précédentes, a regardé l'emploi dans la théorie de l'élasticité comme indispensable, ne vaut donc pas la méthode naturelle, consistant dans l'investigation directe et libre de chaque sujet.

Le Mémoire se termine par l'examen du cas où de grandes tensions auraient été appliquées à la plaque antérieurement aux déplacements considérés, et par l'étude de l'influence de la rigidité sur le mouvement transversal des membranes. Cette influence est soumise à des lois approchées très-simples, analogues à celles qui concernent les cordes vibrantes.

§ I. — *Préliminaires.*

Je me propose d'étudier d'abord l'équilibre, sous l'action de forces extérieures données, d'une plaque mince formée de couches sensiblement planes et parallèles, et dont la contexture, constante ou assez lentement variable d'un point à l'autre d'une même couche, pourra changer rapidement et même avec discontinuité d'une couche à ses voisines. J'admettrai que tous les éléments plans pris dans la plaque ne soient soumis par unité de surface, antérieurement aux déformations étudiées, qu'à une pression normale et constante, telle que la pression atmosphérique, dont on pourra faire abstraction. Pendant que les déformations se produiront, aucune nouvelle pression ne sera supposée s'exercer sur l'une des deux bases de la plaque; mais des actions diverses pourront être appliquées à son autre base, ainsi qu'à toute sa masse et sur son contour.

Je prendrai pour plan des xy d'un système d'axes rectangulaires des x, y, z un plan intérieur à la plaque et sensiblement parallèle à ses deux bases. Celles-ci auront pour équation, l'une $z = -\varepsilon'$, et l'autre $z = \varepsilon''$, ε', ε'' étant deux quantités positives, lentement variables avec x et y, et dont la somme est l'épaisseur 2ε de la plaque. J'admettrai qu'on ait choisi les z négatifs du côté de la base qui n'est soumise à aucune action, et j'appellerai P_x, P_y, P_z les composantes données, suivant les axes, de l'action appliquée à l'unité superficielle de l'autre base.

On sait que les composantes suivant les axes N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 des forces élastiques exercées, par unité de surface, sur les éléments menés par un point (x, y, z), sont des fonctions linéaires, sans termes constants, des six déformations simples ∂, g, qui ont pour expressions

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\partial_x = \frac{du}{dx},\quad \partial_y = \frac{dv}{dy},\quad \partial_z = \frac{dw}{dz},\\ &g_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy},\quad g_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz},\quad g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx},\end{aligned}\right.$$

u, v, w étant les déplacements de la molécule qui a x, y, z pour coor-

données primitives. Lorsque, en particulier, la contexture est symétrique par rapport au plan des xy, N_1, N_2, N_3, T_3 dépendent seulement des trois ∂ et de g_{xy}, et T_1, T_2 dépendent seulement de g_{yz}, g_{zx}. Mais nous supposerons quelconque la contexture de la plaque.

Si l'on fait $N_3 = 0$, $T_1 = T_2 = 0$, les expressions de N_3, T_1, T_2, ainsi annulées, fournissent ∂_z, g_{yz}, g_{zx} en fonction linéaire de ∂_x, ∂_y, g_{xy}, et N_1, N_2, T_3 deviennent de simples fonctions linéaires des trois mêmes variables. Nous admettrons que les coefficients d'élasticité qui entrent dans ces dernières expressions varient, tout le long d'une normale à la plaque, proportionnellement à une même fonction positive K de z, de manière qu'on ait

$$(2)\qquad \begin{cases} N_1 = K(\beta\partial_x + \beta'\partial_y + \beta'' g_{xy}), \\ N_2 = K(\beta_1\partial_x + \beta'_1\partial_y + \beta''_1 g_{xy}), \\ T_3 = K(\gamma\partial_x + \gamma'\partial_y + \gamma'' g_{xy}): \end{cases}$$

nous admettrons aussi que les coefficients qui entrent dans les expressions de ∂_z, g_{yz}, g_{zx} en fonction de ∂_x, ∂_y, g_{xy} soient constants le long de la même normale. β, β', β'', $\beta_1, \ldots, \gamma''$ seront donc indépendants de z, mais pourront changer avec x et y; nous supposerons au contraire que la fonction K, variable, même sans continuité, avec z, soit constante ou très-lentement variable avec x et y.

L'expression $N_1\partial_x + N_2\partial_y + T_3 g_{xy}$, si l'on y substitue à N_1, N_2, T_3 les seconds membres de (2), est positive quels que soient ∂_x, ∂_y, g_{xy}. En effet, d'après la formule (12 *bis*) de mon Mémoire précédent (sur les tiges), l'expression plus générale

$$N_1\partial_x + N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz} + T_2 g_{zx} + T_3 g_{xy}$$

est essentiellement positive chez tous les corps de la nature. Or, si l'on y suppose $N_3 = 0$, $T_2 = T_1 = 0$, elle se réduit à $N_1\partial_x + N_2\partial_y + T_3 g_{xy}$, et N_1, N_2, T_3 prennent les valeurs (2). On peut donc poser, quels que soient ∂_x, ∂_y, g_{xy},

$$(2\ bis)\qquad \begin{cases} \quad(\beta\partial_x + \beta'\partial_y + \beta'' g_{xy})\partial_x \\ + (\beta_1\partial_x + \beta'_1\partial_y + \beta''_1 g_{xy})\partial_y \\ + (\gamma\partial_x + \gamma'\partial_y + \gamma'' g_{xy}) g_{xy} > 0. \end{cases}$$

Nous appellerons K_1 la moyenne des valeurs que prend K le long d'une normale 2ε à la plaque, et, assimilant cette normale à une ligne matérielle dont la densité linéaire, c'est-à-dire la masse par unité de longueur, serait K en chaque point, nous admettrons que l'on ait déterminé son centre de gravité et son moment d'inertie par rapport à ce centre. Supposons que la plaque soit plane dans son état naturel, c'est-à-dire que, dans cet état, tous les centres de gravité pareils de ses normales se trouvent sur un même plan que nous appellerons la *couche moyenne* de la plaque. En choisissant la position primitive de cette couche pour plan des xy, et appelant k une certaine quantité indépendante de z, on aura

$$(3)\qquad \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \mathrm{K}\,dz = 2\varepsilon \mathrm{K}_1,\quad \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \mathrm{K}z\,dz = 0,\quad \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \mathrm{K}z^2\,dz = \frac{2k\varepsilon^3}{3};$$

si la fonction K se réduit à une constante, les quantités ε', ε'' seront égales à ε, et K_1, k ne seront autres que K.

Nous aurons encore à considérer des fonctions $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$ ainsi définies :

$$(4)\qquad \varphi(z) = \int_{-\varepsilon'}^{z} \mathrm{K}\,dz,\quad \varphi_1(z) = \int_{-\varepsilon'}^{z} \mathrm{K}z\,dz,$$

dont la première, nulle pour $z = -\varepsilon'$, vaut $2\varepsilon K_1$ pour $z = \varepsilon''$, et dont la seconde s'annule pour $z = -\varepsilon'$ et pour $z = \varepsilon''$. Ces fonctions sont évidemment continues, alors même que K ne le serait pas. Les intégrales $\int\varphi(z)\,dz$, $\int\varphi_1(z)\,dz$, prises entre les limites $-\varepsilon'$ et ε'', peuvent être ramenées aux précédentes : l'intégration par parties donne, en effet, si l'on tient compte de (3) et (4),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \varphi(z)\,dz = \varepsilon''\varphi(\varepsilon'') - \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} z\varphi'(z)\,dz = 2\mathrm{K}_1\varepsilon\varepsilon'',\\ &\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \varphi_1(z)\,dz = [z\varphi_1(z)]_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} - \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} z\varphi'_1(z)\,dz = -\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \mathrm{K}z^2\,dz = -\frac{2k\varepsilon^3}{3}. \end{aligned}\right.$$

Occupons-nous actuellement des équations d'équilibre de la plaque. Elles se divisent en équations indéfinies, applicables à tous les élé-

ments de volume, et en conditions définies, dont les unes concernent seulement ses deux bases, d'autres les surfaces, parallèles à ces bases, sur lesquelles la constitution de la matière varie brusquement lorsqu'on les traverse, d'autres, enfin, la surface latérale ou le contour de la plaque.

Appelons, au point (x, y, z), ρ la densité, X, Y, Z les composantes suivant les axes de l'action extérieure exercée sur l'unité de masse, et nous aurons les trois équations indéfinies connues

$$(6)\quad \begin{cases} -\dfrac{dT_2}{dz} = \dfrac{dN_1}{dx} + \dfrac{dT_3}{dy} + \rho X, \\ -\dfrac{dT_1}{dz} = \dfrac{dT_3}{dx} + \dfrac{dN_2}{dy} + \rho Y, \\ -\dfrac{dN_3}{dz} = \dfrac{dT_2}{dx} + \dfrac{dT_1}{dy} + \rho Z. \end{cases}$$

Sur les deux bases de la plaque, l'action extérieure exercée par unité de surface est directement donnée, c'est-à-dire qu'on a

$$(7)\quad \begin{cases} \text{pour} \quad z = -\varepsilon', \quad T_2 = T_1 = N_3 = 0, \\ \text{pour} \quad z = \varepsilon'', \quad T_2 = P_x, \quad T_1 = P_y, \quad N_3 = P_z. \end{cases}$$

A la surface de séparation de deux couches contiguës de constitution différente, les déplacements u, v, w sont les mêmes de part et d'autre, et les composantes, suivant les axes, de l'action exercée sur les deux faces de chacun de ses éléments plans, sont égales et contraires. Ces deux conditions reviennent à dire que les déplacements u, v, w et les forces élastiques T_2, T_1, N_3 varient avec continuité sur toute la longueur d'une normale quelconque, 2ε, à la plaque.

Il reste à trouver les conditions spéciales au contour. Afin qu'il soit permis de faire abstraction des particularités que peut y présenter la forme ou la constitution de la plaque, ainsi que le mode de distribution des forces qui y sont appliquées, considérons une ligne matérielle $f(x, y) = 0$, située, antérieurement aux déplacements, sur le plan des xy et à une petite distance du contour, et prenons pour surface latérale de la plaque le cylindre décrit le long de cette ligne par une parallèle à l'axe des z. Le contour fictif $f(x, y) = 0$ se composera

généralement d'une courbe fermée extérieure, que nous supposerons décrite en tournant dans le sens des x positifs vers les y positifs, et, si la plaque est percée en divers points, de plusieurs courbes fermées intérieures, que nous supposerons décrites en sens inverse. Soient ds un élément de ce contour au point quelconque (x, y), dx et dy ses projections sur les deux axes des x et des y : les cosinus des angles que fait cet élément avec les mêmes axes sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, et si l'on appelle α l'angle, variable de zéro à 2π, que fait avec les x positifs la normale menée en (x, y), au cylindre contournant, on aura $\cos\alpha = \pm\frac{dy}{ds}$, $\sin\alpha = \mp\frac{dx}{ds}\cdot$ Supposons que la normale soit menée vers le dehors de la plaque : aux points du contour où $dx = 0$ et où $dy = ds$, l'angle α sera nul; il faudra donc adopter les signes supérieurs, et poser

$$(8) \qquad \cos\alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \sin\alpha = -\frac{dx}{ds}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{ds} = -\sin\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\alpha.$$

Le cylindre contournant pourra être décomposé en bandes rectangulaires de largeur infiniment petite ds et de hauteur 2ε, sur chaque élément $dz\,ds$ desquelles certaines actions extérieures seront exercées. Nous appellerons, par unité de surface, p_x, p_y, p_z les composantes de l'action extérieure exercée sur cet élément, et p_n, p_s les composantes de la même action suivant la normale correspondante et suivant l'élément ds. Des formules connues de la théorie de l'élasticité donnent

$$(9) \qquad \begin{cases} p_x = N_1\cos\alpha + T_3\sin\alpha, \\ p_y = T_3\cos\alpha + N_2\sin\alpha, \\ p_z = T_2\cos\alpha + T_1\sin\alpha, \end{cases}$$

et il est d'ailleurs aisé de voir que

$$p_n = p_x\cos\alpha + p_y\sin\alpha, \quad p_s = -p_x\sin\alpha + p_y\cos\alpha.$$

En substituant dans ces dernières formules les valeurs précédentes de p_x, p_y, il vient

$$(10) \qquad \begin{cases} p_n = N_1\cos^2\alpha + N_2\sin^2\alpha + 2T_3\cos\alpha\sin\alpha, \\ p_s = -(N_1 - N_2)\sin\alpha\cos\alpha + T_3(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \end{cases}$$

Les composantes p_n, p_s, p_z des actions exercées sur l'unité de surface de tous les éléments $dz\,ds$ d'une bande ont, par rapport à trois axes rectangulaires menés, par le point (x, y) d'où part l'élément ds, suivant la normale, suivant l'élément ds et parallèlement à l'axe des z, les trois résultantes

$$ds\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_n\,dz,\quad ds\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_s\,dz,\quad ds\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_z\,dz,$$

et les trois moments respectifs

$$-\,ds\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} z\,p_s\,dz,\quad ds\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} z\,p_n\,dz,\quad 0.$$

Appelons $F_n\,ds$, $F_s\,ds$, $F_z\,ds$ les trois composantes totales, $-M_n\,ds$, $M_s\,ds$ les deux moments, et nous aurons

$$(11)\qquad F_n = \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_n\,dz,\quad F_s = \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_s\,dz,$$

$$(12)\qquad F_z = \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_z\,dz,\quad M_n = \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_s\,z\,dz,\quad M = \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_n\,z\,dz.$$

Ainsi les actions extérieures exercées sur une bande $2\varepsilon\,ds$ du cylindre contournant équivalent statiquement à trois composantes appliquées au point (x, y), et à deux couples, dont l'un, de moment $M_s\,ds$, est normal à l'élément ds, et dont l'autre, de moment $-M_n\,ds$, est dans le plan de la bande considérée. Ce dernier couple revient lui-même à deux forces parallèles aux z, égales à M_n en valeur absolue, et appliquées, l'une au point (x, y) d'où part l'élément ds, l'autre à la seconde extrémité $(x + dx, y + dy)$ du même élément, c'est-à-dire au point d'où part l'élément suivant du contour : ces deux forces ont pour composantes,, suivant les z positifs, la première M_n et la seconde $-M_n$. Les couples parallèles au cylindre contournant peuvent donc être remplacés statiquement par deux forces dirigées suivant les z, appliquées à chaque point tel que $(x + dx, y + dy)$ et ayant respectivement pour valeurs $-M_n$, $M_n + \frac{dM_n}{ds}ds$: la résultante de ces deux forces est $\frac{dM_n}{ds}ds$. Si on la joint à $F_z\,ds$, et qu'on appelle $\mathfrak{F}_z\,ds$

la somme obtenue, les deux premières relations (12) seront remplacées par celle-ci

$$(12\,bis) \qquad \mathfrak{F}_z = F_z + \frac{dM_n}{ds}.$$

En résumé, l'action totale exercée sur une bande $2\varepsilon\, ds$ du cylindre contournant peut être ramenée, quant à sa résultante et à son moment, à un couple de moment $M_s\, ds$ normal à l'élément ds du contour, et à une force appliquée au point d'où part cet élément. Les conditions spéciales au contour consisteront en ce que les composantes de cette force, par rapport à trois axes rectangulaires, et la valeur du couple, ou, à leur place, les déplacements suivant les mêmes axes de la couche moyenne de la plaque et l'inclinaison prise sur les z par la normale au cylindre contournant, y seront directement donnés en fonction de x, y [*].

On peut considérer plusieurs plaques qui auraient, dans leur état primitif, leurs couches moyennes sur le même plan des xy, et qui seraient, en certaines parties de leurs contours, appuyées les unes contre les autres ou soudées ensemble. Dans le premier cas, leurs couches moyennes seraient assujetties à recevoir, de part et d'autre de leurs lignes de séparation, les mêmes déplacements u, v, w; mais elles pourraient tourner autour de ces lignes, de manière à avoir des plans tangents différents : dans le second cas, non-seulement les u, v, w, mais encore les directions des plans tangents seraient les mêmes de part et d'autre des lignes de séparation. La résultante des forces $F_n\, ds$, $F_s\, ds$, $\mathfrak{F}_z\, ds$ exercées sur deux plaques contiguës, de part et d'autre de chaque bande de largeur ds de leur surface de séparation, serait égale, dans les deux cas, à une action extérieure totale donnée; de plus, dans le cas de plaques simplement appuyées l'une sur l'autre, chacune pourrait subir, sur la même bande de largeur ds, l'action d'un couple quelconque $M_s\, ds$ également connu, tandis que, dans le cas de plaques soudées et solidaires dans leurs rotations autour de l'élément ds, ces deux moments se composeraient en un dont la valeur serait seule donnée.

---

[*] Et aussi en fonction de t, dans le cas du mouvement.

§ II. — *Équations indéfinies.*

Les équations (6), multipliées respectivement par dz, et intégrées à partir de $z = -\varepsilon'$, en observant que T_2, T_1, N_3 sont nuls à cette limite et continus tout le long d'une normale quelconque 2ε de la plaque, deviennent

$$(13)\quad \begin{cases} -T_2 = \int_{-\varepsilon'}^{z} \left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \rho X\right) dz, \\ -T_1 = \int_{-\varepsilon'}^{z} \left(\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \rho Y\right) dz, \\ -N_3 = \int_{-\varepsilon'}^{z} \left(\rho Z + \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy}\right) dz. \end{cases}$$

Généralement, les dérivées en x et en y de N_1, N_2, T_3 et les termes ρX, ρY seront comparables à N_1, N_2, T_3; de même les dérivées en x et y de T_2, T_1 et le terme ρZ auront des valeurs du même ordre que T_2, T_1; par suite, à cause de la petitesse de ε' et z, les relations (13) donnent T_2, T_1 très-petits par rapport à N_1, N_2, T_3, et N_3 très-petit lui-même par rapport à T_2, T_1. On peut donc supposer approximativement $T_1 = T_2 = 0$, $N_3 = 0$, obtenir par suite g_{yz}, g_{zx}, ∂_z en fonctions linéaires de ∂_x, ∂_y, g_{xy}, à moins d'erreurs comparables à T_2, T_1, et donner à N_1, N_2, T_3 les formes (2), sauf erreurs de l'ordre de T_2, T_1, ou même seulement de l'ordre de N_3, si le milieu est tel que les formules des N et de T_3 contiennent seulement les ∂ et g_{xy}.

On a d'autre part identiquement, d'après les formules (1), les relations

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{d\partial_x}{dz} = -\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{dg_{zx}}{dx}, \\ \frac{d\partial_y}{dz} = -\frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{dg_{yz}}{dy}, \\ \frac{dg_{xy}}{dz} = -2\frac{d^2 w}{dx\,dy} + \frac{dg_{yz}}{dx} + \frac{dg_{zx}}{dy}. \end{cases}$$

Multiplions celles-ci par dz, et intégrons les résultats à partir de $z = 0$, en observant que ∂_x, ∂_y, g_{xy} sont continus, puisque u, v le sont, le long de toute normale 2ε à la plaque, et que w, et, par suite, ses dérivées secondes en x et y ont sensiblement les mêmes valeurs

sur toute cette même normale. Si nous appelons D_x, D_y, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} les valeurs de ∂_x, ∂_y, g_{xy}, g_{yz}, g_{zx} pour $z = 0$, valeurs dont les deux dernières seront supposées, à moins d'erreurs de l'ordre de T_1, T_2, remplacées par leurs expressions linéaires en fonction de D_x, D_y, G_{xy}, et si nous négligeons des termes insensibles par rapport à ceux qui sont conservés, et d'autres comparables à $T_2 z$, $T_1 z$, il viendra

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \partial_x &= D_x - z\left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{dG_{zx}}{dx}\right),\\ \partial_y &= D_y - z\left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{dG_{yz}}{dy}\right),\\ g_{xy} &= G_{xy} - z\left(2\frac{d^2 w}{dx\,dy} - \frac{dG_{yz}}{dx} - \frac{dG_{zx}}{dy}\right). \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= 2K_1\varepsilon(\beta D_x + \beta' D_y + \beta'' G_{xy}),\\ \mathfrak{N}_2 &= 2K_1\varepsilon(\beta_1 D_x + \beta'_1 D_y + \beta''_1 G_{xy}),\\ \mathfrak{T}_3 &= 2K_1\varepsilon(\gamma D_x + \gamma' D_y + \gamma'' G_{xy}); \end{aligned}\right.$$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} n_1 = \beta&\left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{dG_{zx}}{dx}\right)\\ &+ \beta'\left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{dG_{yz}}{dy}\right) + \beta''\left(2\frac{d^2 w}{dx\,dy} - \frac{dG_{yz}}{dx} - \frac{dG_{zx}}{dy}\right),\\ n_2 = \beta_1&\left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{dG_{zx}}{dx}\right)\\ &+ \beta'_1\left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{dG_{yz}}{dy}\right) + \beta''_1\left(2\frac{d^2 w}{dx\,dy} - \frac{dG_{yz}}{dx} - \frac{dG_{zx}}{dy}\right),\\ t_3 = \gamma&\left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{dG_{zx}}{dx}\right)\\ &+ \gamma'\left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{dG_{yz}}{dy}\right) + \gamma''\left(2\frac{d^2 w}{dx\,dy} - \frac{dG_{yz}}{dx} - \frac{dG_{zx}}{dy}\right), \end{aligned}\right.$$

et les relations (15) changeront (2) en

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} N_1 &= \frac{K}{2K_1\varepsilon}\mathfrak{N}_1 - Kzn_1,\\ N_2 &= \frac{K}{2K_1\varepsilon}\mathfrak{N}_2 - Kzn_2,\\ T_3 &= \frac{K}{2K_1\varepsilon}\mathfrak{T}_3 - Kzt_3. \end{aligned}\right.$$

Les erreurs ainsi commises sur N_1, N_2, T_3 seront tout au plus de l'ordre de T_2, T_1.

Par suite, d'après les notations (4), et à moins d'erreurs, comparables à $T_2 z$, $T_1 z$, qu'on pourra négliger devant T_2, T_1, on aura

$$(19) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\varepsilon'}^{z} N_1\,dz = \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\,\mathfrak{N}_1 - \varphi_1(z)\,n_1, \\ \displaystyle\int_{-\varepsilon'}^{z} N_2\,dz = \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\,\mathfrak{N}_2 - \varphi_1(z)\,n_2, \\ \displaystyle\int_{-\varepsilon'}^{z} T_3\,dz = \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\,\mathfrak{T}_3 - \varphi_1(z)\,t_3, \end{cases}$$

et les deux premières relations (13) deviendront

$$(20) \quad \begin{cases} \displaystyle -T_2 = \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\left(\frac{d\mathfrak{N}_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}_3}{dy}\right) - \varphi_1(z)\left(\frac{dn_1}{dx} + \frac{dt_3}{dy}\right) + \int_{-\varepsilon'}^{z} \rho X\,dz, \\ \displaystyle -T_1 = \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\left(\frac{d\mathfrak{T}_3}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}_2}{dy}\right) - \varphi_1(z)\left(\frac{dt_3}{dx} + \frac{dn_2}{dy}\right) + \int_{-\varepsilon'}^{z} \rho Y\,dz. \end{cases}$$

Si l'on observe que, pour $z = \varepsilon''$, T_2 et T_1 valent respectivement P_x, P_y, et que $\varphi(z) = 2K_1\varepsilon$, $\varphi_1(z) = 0$, ces deux dernières formules donnent les deux premières équations indéfinies cherchées

$$(21) \quad \begin{cases} \displaystyle \frac{d\mathfrak{N}_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}_3}{dy} + P_x + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho X\,dz = 0, \\ \displaystyle \frac{d\mathfrak{T}_3}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}_2}{dy} + P_y + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Y\,dz = 0, \end{cases}$$

et les deux formules (20) sont elles-mêmes changées par ces dernières en celles-ci

$$(22) \quad \begin{cases} \displaystyle T_2 = \varphi_1(z)\left(\frac{dn_1}{dx} + \frac{dt_3}{dy}\right) + \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\left(P_x + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho X\,dz\right) - \int_{-\varepsilon'}^{z} \rho X\,dz, \\ \displaystyle T_1 = \varphi_1(z)\left(\frac{dt_3}{dx} + \frac{dn_2}{dy}\right) + \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\left(P_y + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Y\,dz\right) - \int_{-\varepsilon'}^{z} \rho Y\,dz. \end{cases}$$

Substituons actuellement ces valeurs de T_2, T_1 dans la dernière (13),

et nous obtiendrons une expression de $-N_3$, qui, pour $z = \varepsilon''$, devra se réduire à P_z. En tenant compte de (5), on aura ainsi la troisième équation indéfinie

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} & P_z + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Z\, dz - \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^2 n_1}{dx^2} + 2\frac{d^2 t_3}{dx\,dy} + \frac{d^2 n_2}{dy^2}\right) \\ & \quad + \frac{d\varepsilon'' P_x}{dx} + \frac{d\varepsilon'' P_y}{dy} + \frac{d}{dx}\left(\varepsilon''\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho X\, dz - \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} dz \int_{-\varepsilon'}^{z} \rho X\, dz\right) \\ & \qquad + \frac{d}{dy}\left(\varepsilon''\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Y\, dz - \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} dz \int_{-\varepsilon'}^{z} \rho Y\, dz\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut négliger les quatre derniers termes du premier membre de cette équation. Considérons, par exemple, le dernier, et observons qu'on trouve, en intégrant par parties,

$$\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} z\rho Y\, dz = \varepsilon'' \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Y\, dz - \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} dz \int_{-\varepsilon'}^{z} \rho Y\, dz.$$

Le dernier terme considéré équivaut donc à $\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \frac{d\rho Y}{dy} z\, dz$, intégrale dont les éléments, à cause du facteur z, seront les uns négatifs et les autres positifs, de manière à se neutraliser très-souvent; d'ailleurs, même en supposant tous ses éléments de même signe, cette intégrale n'est que de l'ordre de grandeur de $\frac{d\rho Y}{dy}\varepsilon^2$, tandis que le second terme de l'équation (23) est de l'ordre de $2\varepsilon\rho Z$, et beaucoup plus grand toutes les fois que Y est seulement comparable à Z. De même, les dérivées en x et y de $\varepsilon'' P_x$, $\varepsilon'' P_y$ sont généralement négligeables en comparaison de P_z, et la troisième équation indéfinie peut être écrite simplement

$$(23\ bis)\qquad P_z + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Z\, dz = \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^2 n_1}{dx^2} + 2\frac{d^2 t_3}{dx\,dy} + \frac{d^2 n_2}{dy^2}\right).$$

Dans les trois équations indéfinies (21) et (23 *bis*), il faudra substituer à $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{T}_3$, n_1, n_2, t_3 leurs expressions (16) et (17) en fonction linéaire de D_x, D_y, G_{xy}, w, puis, aux déformations D_x, D_y, G_{xy} de

la couche centrale, leurs valeurs $\frac{du_0}{dx}$, $\frac{dv_0}{dy}$, $\frac{du_0}{dy}+\frac{dv_0}{dy}$, où u_0, v_0 sont les deux premiers déplacements des points de cette couche. Alors ces trois équations ne contiendront plus que les trois fonctions inconnues de x et y appelées u_0, v_0, w, qu'elles serviront à déterminer conjointement avec les conditions spéciales dont nous parlerons au paragraphe suivant. Lorsque u_0, v_0, w seront connus, les formules (15) et (2) donneront en tous les points de la plaque les déformations ∂_x, ∂_y, g_{xy} et les forces N_1, N_2, T_3; puis les formules (22) feront connaître T_2, T_1; enfin la troisième (13) donnera les très-petites valeurs que prend N_3, de telle sorte que toutes les forces élastiques, et, par suite, les déformations ∂, g seront déterminées avec une approximation d'autant plus grande que l'épaisseur 2ε sera plus petite.

Examinons le cas particulier où le milieu est isotrope autour de l'axe des z et a ses coefficients d'élasticité indépendants de x, y. Les expressions des forces élastiques sont alors, d'après les formules (10) de mon Mémoire précédent (sur les tiges), en appelant λ, λ', μ, μ', μ'', ν six coefficients d'élasticité et θ la dilatation $\partial_x+\partial_y+\partial_z$,

$$(24)\quad \begin{cases} N_1=\lambda\theta+\nu\partial_z+2\mu\partial_x, & N_2=\lambda\theta+\nu\partial_z+2\mu\partial_y, & N_3=\lambda'\theta+2\mu'\partial_z, \\ T_1=\mu'' g_{yz}, & T_2=\mu'' g_{zx}, & T_3=\mu g_{xy}. \end{cases}$$

Si l'on fait $T_2=T_1=N_3=0$, il vient

$$(24\ bis)\qquad \partial_z=-\frac{\lambda'}{\lambda'+2\mu'}(\partial_x+\partial_y),\quad g_{yz}=g_{zx}=0,$$

et les expressions de N_1, N_2, T_3 prennent la forme (2), avec

$$(24\ ter)\qquad \begin{cases} K\beta=K\beta'_1=\dfrac{(\lambda+2\mu)(\lambda'+2\mu')-\lambda'(\lambda+\nu)}{\lambda'+2\mu'}, \\ K\beta'=K\beta_1=\dfrac{\lambda(\lambda'+2\mu')-\lambda'(\lambda+\nu)}{\lambda'+2\mu'}, \\ K\gamma''=\mu,\quad \beta''=\beta''_1=\gamma=\gamma'=0. \end{cases}$$

Ces relations donnent $\beta=\beta'_1=\beta'+2\gamma''=\beta_1+2\gamma''$, et les trois équations (21), (23 *bis*), en y substituant les valeurs (16), (17), de $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$,

$\mathfrak{T}_3$, n_1, n_2, t_3, deviennent

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&2K_1\varepsilon\left[(\beta_1+\gamma'')\frac{d\left(\frac{du_0}{dx}+\frac{dv_0}{dy}\right)}{dx}+\gamma''\left(\frac{d^2u_0}{dx^2}+\frac{d^2u_0}{dy^2}\right)\right]\\
&\qquad\qquad+P_x+\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\rho X\,dz=0,\\
&2K_1\varepsilon\left[(\beta_1+\gamma'')\frac{d\left(\frac{du_0}{dx}+\frac{dv_0}{dy}\right)}{dy}+\gamma''\left(\frac{d^2v_0}{dx^2}+\frac{d^2v_0}{dy^2}\right)\right]\\
&\qquad\qquad+P_y+\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\rho Y\,dz=0,\\
&P_z+\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\rho Z\,dz=\frac{2k\varepsilon^3}{3}\beta\left(\frac{d^4w}{dx^4}+2\frac{d^4w}{dx^2dy^2}+\frac{d^4w}{dy^4}\right).
\end{aligned}\right.$$

Supposons le milieu homogène et complétement isotrope, c'est-à-dire tel que $\lambda'=\lambda$, $\nu=0$, $\mu''=\mu'=\mu$, $K=K_1=k=1$, et que, par suite,

$$(26)\qquad \beta=\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu},\quad \beta_1=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu},\quad \gamma''=\mu;$$

les formules (25) seront alors identiques aux équations connues de l'équilibre des plaques.

§ III. — *Conditions spéciales aux contours des plaques.*

Les formules (11), (12), (10) et (9) permettent d'exprimer les actions F_n, F_s, F_z, M_n, M_s exercées sur l'unité de longueur du contour. Si l'on y substitue à N_1, N_2, T_3, T_2, T_1 leurs valeurs (18) et (22), et que l'on néglige, dans l'expression de F_z, les mêmes termes très-petits que dans (23), et, dans celles de M_n, M_s, des termes de l'ordre de $T_2\varepsilon^2$, $T_1\varepsilon^2$, c'est-à-dire de l'ordre de $\varphi_1(z)\varepsilon^2$ ou de ε^4, il vient

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
F_n&=\mathfrak{N}_1\cos^2\alpha+\mathfrak{N}_2\sin^2\alpha+2\mathfrak{T}_3\cos\alpha\sin\alpha,\\
F_s&=-(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2)\sin\alpha\cos\alpha+\mathfrak{T}_3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha);
\end{aligned}\right.$$

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} F_z &= -\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left[\left(\frac{dn_1}{dx}+\frac{dt_3}{dy}\right)\cos\alpha+\left(\frac{dt_3}{dx}+\frac{dn_2}{dy}\right)\sin\alpha\right],\\ M_n &= -\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left[-(n_1-n_2)\sin\alpha\cos\alpha+t_3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\right],\\ M_s &= -\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left[n_1\cos^2\alpha+n_2\sin^2\alpha+2t_3\cos\alpha\sin\alpha\right].\end{aligned}\right.$$

Mais nous avons vu (formule 12 *bis*) que les deux actions F_z et M_n se réduisent à une seule action totale, parallèle à l'axe des z, et égale à $F_z+\frac{dM_n}{ds}$.

Les conditions relatives au contour consisteront, soit à supposer connues directement, dans les formules (27) et (28), les quatre actions F_n, F_s, $F_z+\frac{dM_n}{ds}$, M_s, c'est-à-dire les composantes, suivant trois directions rectangulaires, de la force qui agit sur l'unité de longueur du contour, et le moment du couple, normal à ce contour, qui tend à fléchir la plaque, soit à se donner, au lieu de l'une ou de plusieurs de ces trois composantes, les déplacements du bord considéré de la plaque suivant les directions correspondantes, déplacements qui sont $u_0\cos\alpha+v_0\sin\alpha$ dans le sens de la normale au cylindre contournant, $-u_0\sin\alpha+v_0\cos\alpha$ dans celui de l'élément ds et w dans le sens des z, ou à se donner enfin, au lieu du moment M_s, l'inclinaison par rapport aux z de la normale au cylindre contournant, c'est-à-dire la dérivée $\frac{dw}{dx}\cos\alpha+\frac{dw}{dy}\sin\alpha$ de w le long de la droite matérielle, normale au contour et tangente à la couche moyenne, que le couple M_s tend à faire tourner autour du contour : nous représenterons cette dérivée par $\frac{dw}{dN}$.

Si plusieurs plaques situées sur un même plan sont appuyées les unes contre les autres ou soudées, les conditions spéciales à leurs contours de séparation seront celles que j'ai indiquées à la fin du § I.

§ IV. — *Unité de la solution du problème de l'équilibre.*

Les équations indéfinies (21), (23 *bis*), et les conditions indiquées au paragraphe précédent, déterminent les déplacements d'équilibre u_0,

v_0, w, à cela près de termes correspondants à un petit mouvement d'ensemble de la plaque et dont on peut faire abstraction. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que, si l'on y substitue $u_0 + u'_0$, $v_0 + v'_0$, $w + w'$ à u_0, v_0, w, et si l'on suppose que u_0, v_0, w vérifient toutes ces relations, les nouveaux déplacements u'_0, v'_0, w' ne pourront que correspondre à un petit déplacement d'ensemble de la plaque. Afin d'abréger, représentons par D'_x, D'_y, G'_{xy} les expressions $\frac{du'_0}{dx}$, $\frac{dv'_0}{dy}$, $\frac{du'_0}{dy} + \frac{dv'_0}{dx}$, par G'_{yz}, G'_{zx} les fonctions linéaires obtenues en accentuant D_x, D_y, G_{xy} dans les expressions de G_{yz}, G_{zx}, et appelons $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$, $\mathfrak{T}'_3$, n'_1, n'_2, t'_3 les seconds membres de (16) et (17) avec D_x, D_y, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}, w accentués, et de même F'_n, F'_s, F'_z, M'_n, M'_s les seconds membres de (27) et (28) avec $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{T}_3$, n_1, n_2, t_3 accentués. Les trois équations indéfinies (21) et (23 *bis*) deviendront

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathfrak{N}'_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}'_3}{dy} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{T}'_3}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}'_2}{dy} = 0,\\ &0 = \frac{d}{dx}\left[\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{dn'_1}{dx} + \frac{dt'_3}{dy}\right)\right] + \frac{d}{dy}\left[\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{dt'_3}{dx} + \frac{dn'_2}{dy}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Les conditions spéciales au contour seront devenues :

1° Aux bords où une plaque n'est pas touchée par une autre,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &F'_n = 0 \quad \text{ou} \quad u'_0 \cos\alpha + v'_0 \sin\alpha = 0,\\ &F'_s = 0 \quad \text{ou} \quad -u'_0 \sin\alpha + v'_0 \cos\alpha = 0,\\ &F'_z + \frac{dM'_n}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad w' = 0,\\ &M'_s = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dw'}{dN} = 0;\end{aligned}\right.$$

2° Aux bords où deux plaques se touchent,

(31) u'_0, v'_0, w', F'_n, F'_s sont égaux de part et d'autre du contour de séparation, tandis que l'expression $F'_z + \frac{dM'_n}{ds}$ y est égale et contraire, et, de plus, le moment M'_s est nul de part et d'autre si les deux plaques sont seulement appuyées, tandis que ce moment y est égal de part et d'autre, et $\frac{dw'}{dN}$ égal et contraire, si elles sont soudées.

Multiplions les équations (29) respectivement par u'_0, v'_0, w', puis par $dx\,dy$, et intégrons les résultats sur toute l'étendue de la couche moyenne de la plaque, en employant l'intégration par parties, d'après le procédé bien connu qui m'a permis d'obtenir la formule (15) du Mémoire précédent (sur les tiges). Si l'on désigne par $\int_s$ une intégrale prise sur toute la longueur du contour de chaque plaque, et par $\int_\sigma$ une intégrale prise sur toute la surface σ de sa couche moyenne, surface dont un élément $d\sigma = dx\,dy$, les deux premières équations (29) donneront, en ajoutant les résultats,

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_s [u'_0(\mathfrak{N}'_1 \cos\alpha + \mathfrak{T}'_3 \sin\alpha) + v'_0(\mathfrak{N}'_2 \sin\alpha + \mathfrak{T}'_3 \cos\alpha)]ds \\ &\qquad - \int_\sigma (\mathfrak{N}'_1 D'_x + \mathfrak{N}'_2 D'_y + \mathfrak{T}'_3 G'_{xy})d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

La troisième (29) donnera de même

$$\begin{aligned} &\int_s w' \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left[\left(\frac{dn'_1}{dx} + \frac{dt'_3}{dy}\right)\cos\alpha + \left(\frac{dt'_3}{dx} + \frac{dn'_2}{dy}\right)\sin\alpha\right]ds \\ &\qquad - \int_\sigma \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left[\frac{dw'}{dx}\left(\frac{dn'_1}{dx} + \frac{dt'_3}{dy}\right) + \frac{dw'}{dy}\left(\frac{dt'_3}{dx} + \frac{dn'_2}{dy}\right)\right]d\sigma = 0, \end{aligned}$$

résultat dont la première intégrale n'est autre que $-\int_s w' F'_z ds$. En décomposant la seconde en quatre autres, supposant le facteur $\frac{2k\varepsilon^3}{3}$, qui varie très-peu avec x et y, placé à côté de n'_1, n'_2, t'_3 sous les signes $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, et appliquant encore une fois la même méthode d'intégration par parties, il vient

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} &-\int_s w' F'_z ds \\ &-\int_s \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left[\frac{dw'}{dx}(n'_1 \cos\alpha + t'_3 \sin\alpha) + \frac{dw'}{dy}(t'_3 \cos\alpha + n'_2 \sin\alpha)\right]ds \\ &\qquad + \int_\sigma \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(n'_1 \frac{d^2w'}{dx^2} + 2t'_3 \frac{d^2w'}{dx\,dy} + n'_2 \frac{d^2w'}{dy^2}\right)d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

Observons que les formules (27) et les deux dernières (28) donnent identiquement

$$(34)\quad \begin{cases} F_n\cos\alpha - F_s\sin\alpha = \mathfrak{N}_1\cos\alpha + \mathfrak{T}_3\sin\alpha, \\ F_n\sin\alpha + F_s\cos\alpha = \mathfrak{N}_2\sin\alpha + \mathfrak{T}_3\cos\alpha, \\ M_s\cos\alpha - M_n\sin\alpha = -\dfrac{2k\varepsilon^3}{3}(n_1\cos\alpha + t_3\sin\alpha), \\ M_s\sin\alpha + M_n\cos\alpha = -\dfrac{2k\varepsilon^3}{3}(n_2\sin\alpha + t_3\cos\alpha). \end{cases}$$

Remplaçons les seconds membres de ces relations, supposées accentuées, par les premiers dans les formules (32) et (33), et celles-ci deviendront

$$(32\ bis)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_s [F'_n(u'_0\cos\alpha + v'_0\sin\alpha) + F'_s(-u'_0\sin\alpha + v'_0\cos\alpha)]\,ds \\ \displaystyle\qquad - \int_\sigma (\mathfrak{N}'_1 D'_x + \mathfrak{N}'_2 D'_y + \mathfrak{T}'_3 G'_{xy})\,d\sigma = 0, \end{cases}$$

$$(33\ bis)\quad \begin{cases} \displaystyle -\int_s w' F'_\varepsilon\,ds + \int_s M'_n\left(-\frac{dw'}{dx}\sin\alpha + \frac{dw'}{dy}\cos\alpha\right)ds \\ \displaystyle\quad + \int_s M'_s\left(\frac{dw'}{dx}\cos\alpha + \frac{dw'}{dy}\sin\alpha\right)ds \\ \displaystyle\quad + \int_\sigma \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(n'_1\frac{d^2w'}{dx^2} + 2t'_3\frac{d^2w'}{dx\,dy} + n'_2\frac{d^2w'}{dy^2}\right)d\sigma = 0. \end{cases}$$

Dans ces relations, la partie des intégrales $\int_s$ qui concerne les contours où une plaque n'en touche aucune autre est identiquement nulle. Cela est évident pour (32 *bis*), d'après les deux premières conditions (30). Quant à (33 *bis*), on peut observer que l'expression $-\frac{dw'}{dx}\sin\alpha + \frac{dw'}{dy}\cos\alpha$ y est égale à la dérivée de w' le long de l'élément ds; d'où il suit que la seconde intégrale de (33 *bis*), $\int_s M'_n\frac{dw'}{ds}ds$, intégrée par parties sur toute la longueur de chaque courbe fermée du contour s, devient $-\int_s w'\frac{dM'_n}{ds}ds$. En remarquant, en outre, que

$\frac{dw'}{dx}\cos\alpha + \frac{dw'}{dy}\sin\alpha = \frac{dw'}{d\text{N}}$, les intégrales en s de (33 *bis*) auront pour somme

$$(35) \qquad -\int_s \left[w' \left(\text{F}'_z + \frac{d\text{M}'_n}{ds} \right) - \text{M}'_s \frac{dw'}{d\text{N}} \right] ds,$$

et la partie de cette somme qui est relative aux contours non communs à deux plaques sera bien nulle, d'après les deux dernières conditions (30). D'ailleurs, s'il y a plusieurs plaques appuyées les unes contre les autres ou soudées ensemble, on pourra ajouter membre à membre les relations (32 *bis*) relatives à toutes ces plaques, et aussi les relations (33 *bis*), dans lesquelles on aura remplacé les premières parties par leurs valeurs (35); dans les deux sommes, les intégrales en s concernant les contours de séparation disparaîtront comme ayant leurs éléments des deux côtés d'un même contour égaux et contraires, ou nuls, d'après les conditions (31).

Désignons par $\sum$ des sommes s'étendant à tous les éléments $d\sigma$ de la couche moyenne des plaques considérées, et les deux résultats totaux obtenus seront

$$(36) \qquad \begin{cases} \sum (\mathfrak{N}'_1\, \text{D}'_x + \mathfrak{N}'_2\, \text{D}'_y + \mathfrak{T}'_3\, \text{G}'_{xy})\, d\sigma = 0, \\ \sum \frac{2k\varepsilon^3}{3} \left(n'_1 \frac{d^2 w'}{dx^2} + 2t'_3 \frac{d^2 w'}{dx\,dy} + n'_2 \frac{d^2 w'}{dy^2} \right) d\sigma = 0. \end{cases}$$

Or, en substituant dans la première (36), à $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$, $\mathfrak{T}'_3$, leurs valeurs, qui sont les seconds membres de (16) avec D_x, D_y, G_{xy} accentués, et en se rappelant l'inégalité (2 *bis*), on trouve que la parenthèse et, par suite, le premier membre de cette relation sont essentiellement positifs, et ne peuvent être nuls que si l'on a $\text{D}'_x = \text{D}'_y = \text{G}'_{xy} = 0$, et, par suite, $\text{G}'_{yz} = \text{G}'_{zx} = 0$. Mais alors, en substituant à n'_1, n'_2, t'_3 leurs valeurs (17) avec w' au lieu de w, la seconde (36) donne également $\frac{d^2 w'}{dx^2} = \frac{d^2 w'}{dy^2} = \frac{d^2 w'}{dx\,dy} = 0$. Donc, les déplacements u'_0, v'_0 sont tels, que les déformations D'_x, D'_y, G'_{xy} soient nulles, et ils correspondent à un simple déplacement d'ensemble de la couche moyenne dans son

plan; le déplacement transversal w' a ses dérivées secondes nulles, et il est par suite linéaire en x et y, c'est-à-dire qu'il correspond à un mouvement d'ensemble de la couche moyenne hors de son plan. Si l'on fait abstraction de ces mouvements d'ensemble, le problème de l'équilibre des plaques est bien déterminé.

§ V. — *Équations générales des petits mouvements.*

Ces équations se déduisent de celles de l'équilibre en joignant dans celles-ci, aux actions extérieures, des forces fictives, dites d'*inertie*, dont les composantes suivant les axes, rapportées à l'unité de masse, sont $-\frac{d^2u}{dt^2}$, $-\frac{d^2v}{dt^2}$, $-\frac{d^2w}{dt^2}$. A cause de la forme linéaire des équations, on peut déterminer à part les déplacements pour lesquels les plaques, soumises aux actions extérieures données qui ne varient pas pendant le mouvement, se trouveraient en équilibre, et appeler u, v, w l'excès sur ces déplacements d'équilibre des déplacements réels des molécules à l'époque quelconque t, par rapport à leurs positions primitives. Alors les relations propres à représenter le mouvement ne contiendront pas d'autres actions extérieures que les forces même d'inertie.

Nous supposerons que la plaque vibre dans un milieu assez peu résistant pour qu'on puisse faire pendant le mouvement, sur la base $z=\varepsilon''$, $P_x = P_y = P_z = 0$. Si, observant que les déplacements u, v, w sont, à fort peu près, les mêmes sur toute la longueur de chaque normale 2ε à la plaque, on efface de u_0, v_0 l'indice zéro, et qu'on appelle ρ_1 la densité moyenne sur chaque normale en posant

$$(37) \qquad \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho\, dz = 2\varepsilon\rho_1,$$

les trois équations indéfinies (21) et (23 *bis*) deviendront

$$(38) \qquad 2\rho_1\varepsilon\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{N}_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}_3}{dy}, \quad 2\rho_1\varepsilon\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{T}_3}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}_2}{dy},$$

$$(39) \qquad 2\rho_1\varepsilon\frac{d^2w}{dt^2} = -\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^2n_1}{dx^2} + 2\frac{d^2t_3}{dx\,dy} + \frac{d^2n_2}{dy^2}\right),$$

relations dans lesquelles, pour qu'elles contiennent seulement les inconnues u, v, w, il faudra substituer à $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{T}_3$, n_1, n_2, t_3 leurs expressions (16) et (17), et puis à D_x, D_y, G_{xy} leurs valeurs $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}$.

Occupons-nous actuellement des conditions spéciales aux contours. Nous supposerons que les plaques y supportent en général des masses étrangères solides, assujetties à les suivre dans leurs déplacements u, v, w et comparables à une infinité de points voisins placés sur le plan des xy; si certaines lignes composées de points pareils ne se trouvaient pas sur les bords des plaques, mais à l'intérieur de leur surface, on les assimilerait aux lignes de séparation de deux plaques soudées ensemble. Les actions extérieures exercées sur un élément ds des contours et dépendant du mouvement équivaudront à une force unique ayant pour composantes totales suivant les axes, si l'on appelle $\rho' ds$ la masse étrangère entraînée par cet élément, les composantes pareilles de son inertie, c'est-à-dire $-\rho'\frac{d^2u}{dt^2}ds$, $-\rho'\frac{d^2v}{dt^2}ds$, $-\rho'\frac{d^2w}{dt^2}ds$. La même action, rapportée à l'unité de longueur du contour, et projetée successivement sur la normale au cylindre contournant, sur l'élément ds et sur l'axe des z, donnera, pour ses composantes suivant ces directions respectives,

$$(40)\quad -\rho'\frac{d^2}{dt^2}(u\cos\alpha+v\sin\alpha),\quad -\rho'\frac{d^2}{dt^2}(-u\sin\alpha+v\cos\alpha),\quad -\rho'\frac{d^2w}{dt^2}.$$

Si le contour considéré n'est pas commun à deux plaques, ces expressions devront être égalées respectivement aux expressions, données par (27) et (28), de F_n, F_s, $F_z+\frac{dM_n}{ds}$; de plus, on aura, dans (28), $M_s=0$, à moins que la dérivée $\frac{dw}{dN}$ ne soit directement donnée, auquel cas l'agent qui lui donnerait à chaque instant cette valeur équivaudrait à un couple M_s ayant l'expression (28).

Si le contour considéré est commun à deux plaques contiguës, les u, v, w y sont égaux de part et d'autre, et de plus les trois expressions (40) sont les résultantes respectives des actions F_n, F_s, $F_z+\frac{dM_n}{ds}$, exercées

sur les deux plaques. Quant aux moments M_s, ils sont nuls de chaque côté de la ligne de séparation, lorsque les plaques sont seulement appuyées l'une contre l'autre, à moins que les dérivées $\frac{dw}{dN}$ n'y soient directement données, et ils sont égaux de part et d'autre lorsque les plaques sont soudées; de plus, dans ce cas, les deux dérivées $\frac{dw}{dN}$ y sont égales et contraires.

Si l'on joint à toutes ces conditions celles-ci que les déplacements u, v, w et les vitesses $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ doivent être supposés donnés pour $t = 0$, les valeurs de u, v, w à toute époque seront complétement déterminées. En effet, remplaçons dans ces équations, comme au paragraphe précédent, u, v, w par $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$, et elles deviendront :

1° Les équations indéfinies

$$(41)\quad \begin{cases} 2\rho_1\varepsilon\dfrac{d^2u'}{dt^2} = \dfrac{d\mathfrak{N}'_1}{dx} + \dfrac{d\mathfrak{T}'_3}{dy}, \quad 2\rho_1\varepsilon\dfrac{d^2v'}{dt^2} = \dfrac{d\mathfrak{T}'_3}{dx} + \dfrac{d\mathfrak{N}'_2}{dy}, \\ 2\rho_1\varepsilon\dfrac{d^2w'}{dt^2} = -\dfrac{2h\varepsilon^3}{3}\left[\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dn'_1}{dx} + \dfrac{dt'_3}{dy}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dt'_3}{dx} + \dfrac{dn'_2}{dy}\right)\right]; \end{cases}$$

2° Les conditions relatives au contour où une plaque n'est touchée par aucune autre :

$$(42)\quad \begin{cases} -\rho'\dfrac{d^2}{dt^2}(u'\cos\alpha + v'\sin\alpha) = F'_n, & \text{ou} \quad u'\cos\alpha + v'\sin\alpha = 0, \\ -\rho'\dfrac{d^2}{dt^2}(-u'\sin\alpha + v'\cos\alpha) = F'_s, & \text{ou} \quad -u'\sin\alpha + v'\cos\alpha = 0, \\ -\rho'\dfrac{d^2w'}{dt^2} = F'_z + \dfrac{dM'_n}{ds}, & \text{ou} \quad w' = 0, \\ \qquad 0 = M'_s, & \text{ou} \quad \dfrac{dw'}{dN} = 0; \end{cases}$$

3° Les conditions spéciales aux contours le long desquels deux

plaques se touchent :

$$(43)\left\{\begin{array}{l}
u',\ v',\ w', \text{ égaux de part et d'autre du contour considéré,}\\
-\rho' \dfrac{d^2}{dt^2}(u'\cos\alpha + v'\sin\alpha) = \text{la différence des deux valeurs de } F'_n \text{ des deux côtés de ce contour,}\\
-\rho' \dfrac{d^2}{dt^2}(-u'\sin\alpha + v'\cos\alpha) = \text{la différence des deux valeurs pareilles de } F'_s,\\
-\rho' \dfrac{d^2 w'}{dt^2} = \text{la somme des deux valeurs pareilles de } F'_z + \dfrac{dM'_n}{ds},\\
\text{et, de plus,}\\
M'_s = 0 \text{ des deux côtés si les deux plaques sont seulement appuyées,}\\
M'_s \text{ égaux de part et d'autre et } \dfrac{dw'}{dN} \text{ égaux et de signe contraire de part et d'autre si elles sont soudées;}
\end{array}\right.$$

4° Les conditions concernant l'état initial :

$$(44)\qquad u' = v' = w' = 0,\quad \frac{du'}{dt} = \frac{dv'}{dt} = \frac{dw'}{dt} = 0 \text{ pour } t = 0.$$

Pour démontrer que u', v', w' seront forcément nuls pour $t \gtrless 0$, multiplions les trois équations (41) par $u'\,dx\,dy$, $v'\,dx\,dy$, $w'\,dx\,dy$, et intégrons les résultats après avoir ajouté les deux premiers sur toute la surface d'une plaque, en opérant exactement comme au paragraphe précédent. Il viendra

$$\begin{aligned}
&\int_\sigma 2\rho_1\varepsilon\left(u'\frac{d^2u'}{dt^2} + v'\frac{d^2v'}{dt^2}\right)d\sigma,\\
&\quad = \int_s [F'_n(u'\cos\alpha + v'\sin\alpha) + F'_s(-u'\sin\alpha + v'\cos\alpha)]\,ds\\
&\qquad - \int_\sigma (\mathfrak{N}'_1 D'_x + \mathfrak{N}'_2 D'_y + \mathfrak{T}'_3 G'_{xy})\,d\sigma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_\sigma 2\rho_1\varepsilon w'\frac{d^2w'}{dt^2}\,d\sigma\\
&\quad = \int_s \left[w'\left(F'_z + \frac{dM'_n}{ds}\right) - \frac{dw'}{dN}M'_s\right]ds\\
&\qquad - \int_\sigma \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(n'_1\frac{d^2w'}{dx^2} + 2t'_3\frac{d^2w'}{dx\,dy} + n'_2\frac{d^2w'}{dy^2}\right)d\sigma.
\end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les résultats pareils relatifs aux diverses plaques qui se touchent, et observons que les intégrales en s seront nulles d'après les conditions (42), (43), aux contours où il n'y a pas de masses étrangères ρ', et vaudront respectivement, pour les deux équations, aux contours où se trouvent ces masses,

$$-\Sigma\rho'\Big[(u'\cos\alpha + v'\sin\alpha)\frac{d^2}{dt^2}(u'\cos\alpha + v'\sin\alpha) + (-u'\sin\alpha + v'\cos\alpha)\frac{d^2}{dt^2}(-u'\sin\alpha + v'\cos\alpha)\Big]ds,$$

$$-\Sigma\rho' w'\frac{d^2 w'}{dt^2}ds,$$

les signes Σ s'étendant à tous les éléments de ces contours. Faisons passer ces termes dans les premiers membres, et nous aurons

$$(44\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma 2\rho_1\varepsilon\left(u'\frac{d^2u'}{dt^2} + v'\frac{d^2v'}{dt^2}\right)d\sigma \\ &\quad + \Sigma\rho'\Big[(u'\cos\alpha + v'\sin\alpha)\frac{d^2}{dt^2}(u'\cos\alpha + v'\sin\alpha) \\ &\quad\quad + (-u'\sin\alpha + v'\cos\alpha)\frac{d^2}{dt^2}(-u'\sin\alpha + v'\cos\alpha)\Big]ds \\ &\quad = -\Sigma(\mathfrak{N}'_1 D'_x + \mathfrak{N}'_2 D'_y + \mathfrak{T}'_3 G'_{xy})d\sigma, \\ &\Sigma 2\rho_1\varepsilon w'\frac{d^2w'}{dt^2}d\sigma + \Sigma\rho' w'\frac{d^2w'}{dt^2}ds \\ &\quad = -\sum\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(n'_1\frac{d^2w'}{dx^2} + 2t'_3\frac{d^2w'}{dx\,dy} + n'_2\frac{d^2w'}{dy^2}\right)d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Or, observons que la fonction u', par exemple, et sa dérivée $\frac{du'}{dt}$, étant nulles pour $t = 0$, ne peuvent cesser de l'être l'une sans l'autre pour $t \gtrless 0$, et, qu'à l'instant où elles cesseraient d'être nulles, la dérivée seconde $\frac{d^2u'}{dt^2}$ aurait ou prendrait le signe de $\frac{du'}{dt}$, tandis qu'elle aurait le signe contraire de celui de $\frac{du'}{dt}$ avant le moment de l'annulation de $\frac{du'}{dt}$; pour la même raison, u' et $\frac{du'}{dt}$ auraient même signe après s'être annulées et signe contraire avant. Donc, pour $t \gtrless 0$, u' et $\frac{d^2u'}{dt^2}$ auraient même signe et donneraient un produit positif. Il en est de même des

autres produits fonctions de t qui entrent dans les premiers membres de (44 *bis*), de telle sorte que ces premiers membres sont essentiellement positifs. Or le second membre de la première formule (44 *bis*) est essentiellement négatif d'après ce qui a été démontré au paragraphe précédent, et on ne peut satisfaire à cette relation qu'en faisant, quel que soit t, $u' = v' = 0$, $D'_x = D'_y = G'_{xy} = 0$, et, par suite, $G'_{yz} = G'_{zx} = 0$. Mais alors le second membre de la deuxième (44 *bis*) est aussi essentiellement négatif, et il faut poser $w' = 0$. On a donc bien, à toute époque, $u' = v' = w' = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Je ne m'occuperai pas d'intégrer les équations de l'équilibre ou du mouvement des plaques. On peut voir de beaux exemples de ces intégrations dans Navier (*Bulletin de la Société philomathique*, année 1823, p. 92), qui a étudié, par exemple, l'équilibre d'une plaque horizontale rectangulaire supportant des poids et appuyée sur son contour; dans Poisson (*Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, aux *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1829, t. VIII), qui s'occupe, entre autres questions, du mouvement transversal d'une plaque circulaire lorsque les lignes nodales sont des cercles concentriques, et dans M. Kirchhoff (*Journal de Crelle*, 1850, t. 40, p. 51), qui étudie le même mouvement transversal lorsque les lignes nodales sont à la fois des cercles concentriques et des rayons.

§ VI. — *Cas où la plaque est soumise à des tractions considérables, antérieures aux déplacements. — Vibrations des membranes en tenant compte de la rigidité.*

Terminons ce Mémoire par l'étude d'une plaque soumise, sur son contour, antérieurement aux déplacements considérés, à des tractions assez considérables pour qu'il faille tenir compte de leur action pendant que ces déplacements s'effectuent et pour avoir même altéré la contexture naturelle du corps. La plaque est alors analogue à une membrane tendue, dont les mouvements transversaux, bien qu'assez influencés par la rigidité, sont dûs principalement aux tensions initiales. Considérons-la d'abord dans son état primitif, état dans lequel nous supposerons toujours qu'aucune action extérieure ne soit appli-

quée à son intérieur, et divisons-la, par des plans normaux aux x et aux y, en éléments plans rectangulaires de hauteur 2ε et de base $dx\,dy$. On sait qu'il passe, par tout point d'un corps, trois éléments plans rectangulaires sur lesquels les actions exercées sont normales; nous supposerons que ces éléments plans aient partout, à fort peu près, dans l'état primitif de la plaque, les mêmes directions choisies pour celles des plans coordonnés, et nous appellerons N_1^0, N_2^0, N_3^0 leurs valeurs respectives par unité de surface. L'équilibre d'un parallélépipède élémentaire $dx\,dy\,dz$ exigera que N_1^0 soit indépendant de x, N_2^0 de y, N_3^0 de z. Par suite, $N_3^0 = 0$, puisque cette force est supposée nulle aux deux extrémités d'une normale 2ε. Quant à N_1^0 et N_2^0, si les actions exercées sur les faces latérales des éléments de volume $2\varepsilon\,dx\,dy$ sont rigoureusement normales à ces faces, comme nous le supposerons, l'équilibre de ces éléments exigera que les intégrales

$$\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} N_1^0\,dz, \quad \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} N_2^0\,dz, \text{ que nous appellerons respectivement } Q_x,\ Q_y,$$

soient rigoureusement constantes, la première le long de toute parallèle aux x, la seconde le long de toute parallèle aux y, alors même que l'épaisseur $\varepsilon' + \varepsilon''$ ou 2ε varierait lentement d'un point à l'autre; les points d'application de la tension $Q_x\,dy$ exercée sur les diverses sections normales $2\varepsilon\,dy$ d'un filet de plaque parallèle aux x et de largeur constante, devront être rigoureusement sur une parallèle aux x; et, de même, les points d'application de la tension $Q_y\,dx$, exercée sur les diverses sections normales $2\varepsilon\,dx$ d'un filet parallèle aux y, devront se trouver sur une parallèle aux y.

Nous supposerons que N_1^0, dont les variations, suivant les x, seront très-lentes et négligeables sur une petite longueur, varie d'une manière continue avec y, et d'une manière aussi rapide qu'on voudra, même discontinue, avec z. De même, N_2^0 aura sa dérivée par rapport à y négligeable, et pourra avoir ses dérivées par rapport à x et à z, la première sensible, la seconde aussi grande qu'on voudra. Les trois équations indéfinies de l'équilibre ne seront plus précisément les équations (6), mais celles-ci extraites de mon Étude sur les ondes liquides périodiques [*Savants étrangers*, t. XX, 1871 (*voir* form. 3 *bis* de ce

Mémoire)]:

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}-\frac{dN_1^0}{dy}\frac{dv}{dx}-\frac{dN_1^0}{dz}\frac{dw}{dx}+\rho X=0,\\ &\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}-\frac{dN_2^0}{dz}\frac{dw}{dy}-\frac{dN_2^0}{dx}\frac{du}{dy}+\rho Y=0,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+\rho Z=0.\end{aligned}\right.$$

Les formules des forces élastiques qu'il conviendra d'employer seront celles que j'ai établies dans le même Mémoire (*voir* la note placée à la fin de la troisième Note complémentaire), et qui donneront dans le cas actuel

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &N_1=N_1^0\left(1-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)+N'_1,\\ &N_2=N_2^0\left(1-\frac{dw}{dz}-\frac{du}{dx}\right)+N'_2,\quad N_3=N'_3,\\ &T_1=N_2^0\frac{dw}{dy}+T'_1,\quad T_2=N_1^0\frac{dw}{dx}+T'_2,\\ &\qquad T_3=N_1^0\frac{dv}{dx}+N_2^0\frac{du}{dy}+T'_3;\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 sont les composantes suivant les axes des petites forces élastiques, produites par les six déformations δ, g et fonctions linéaires de ces déformations, qui viennent se joindre aux composantes normales N_1^0, N_2^0, 0, pour donner, après les déplacements u, v, w, les vraies forces élastiques exercées sur l'unité de surface primitive des trois éléments plans primitivement normaux aux axes des coordonnées.

Les expressions (46) des N, T, changent les trois équations (45) en celles-ci

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{dT'_2}{dz}=\frac{dN'_1}{dx}+\frac{dT'_3}{dy}+\rho X+N_2^0\frac{d^2u}{dy^2},\\ &-\frac{dT'_1}{dz}=\frac{dT'_3}{dx}+\frac{dN'_2}{dy}+\rho Y+N_1^0\frac{d^2v}{dx^2},\\ &-\frac{dN'_3}{dz}=\frac{dT'_2}{dx}+\frac{dT'_1}{dy}+\rho Z+N_1^0\frac{d^2w}{dx^2}+N_2^0\frac{d^2w}{dy^2}.\end{aligned}\right.$$

Cherchons actuellement les conditions relatives aux deux bases de la plaque et aux surfaces de séparation de deux couches hétérogènes, s'il y en a. Toutes ces surfaces ont pour caractère commun d'être, dans leurs positions primitives, parallèles au plan des xy. Leur normale en un point est donc, à toute époque, perpendiculaire à l'élément rectiligne, primitivement parallèle aux x, qui fait avec les axes des x, y, z des angles ayant respectivement pour cosinus, 1, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$, et à l'élément rectiligne, primitivement parallèle aux y, qui fait avec les mêmes axes des angles ayant les cosinus $\frac{du}{dy}$, 1, $\frac{dw}{dy}$: les cosinus pareils qui fixent la direction de cette normale sont donc $-\frac{dw}{dx}$, $-\frac{dw}{dy}$, 1. Par suite, des formules connues, déduites de la considération du tétraèdre de Cauchy, donnent, pour les composantes suivant les axes de la force élastique exercée sur l'unité de surface d'un élément plan primitivement parallèle aux xy, les valeurs respectives suivantes :

$$-N_1\frac{dw}{dx}-T_3\frac{dw}{dy}+T_2,$$

$$-T_3\frac{dw}{dx}-N_2\frac{dw}{dy}+T_1,$$

$$-T_2\frac{dw}{dx}-T_1\frac{dw}{dy}+N_3;$$

les formules (46) réduisent ces valeurs à T'_2, T'_1, N'_3. Donc les conditions spéciales aux deux bases de la plaque et aux surfaces de séparation des couches hétérogènes, reviennent à dire, comme au § I, que T'_2, T'_1, N'_3, u, v, w varient avec continuité sur toute la longueur d'une normale 2ε à la plaque, et que l'on a, pour $z=-\varepsilon'$, $T'_2=T'_1=N'_3=0$, pour $z=\varepsilon''$, $T'_2=P_x$, $T'_1=P_y$, $N'_3=P_z$. On en déduira, par suite, pour T'_2, T'_1, N'_3, des expressions pareilles à celles (13) précédemment obtenues pour T_2, T_1, N_3, mais avec ces différences que ρX, ρY, ρZ seront actuellement remplacés par les expressions $\rho X+N_2^0\frac{d^2u}{dy^2}$, $\rho Y+N_1^0\frac{d^2v}{dx^2}$, $\rho Z+N_1^0\frac{d^2w}{dx^2}+N_2^0\frac{d^2w}{dy^2}$. Si la plaque ou membrane n'est pas dénuée de rigidité, c'est-à-dire si T'_2, T'_1 ont des valeurs sensibles, ces expressions ne seront pas incompa-

rablement plus grandes que les autres termes des seconds membres de (47); on pourra négliger encore T'_2. T'_1 devant N'_1, N'_2, T'_3, négliger même N'_3 devant T'_2, T'_1, et mettre, par suite, N'_1, N'_2, T'_3 sous les formes (2). Comme d'ailleurs rien n'empêchera d'établir les relations (15), qui sont purement cinématiques, toutes les formules du § II s'appliqueront au cas actuel, à cela près, que les N, T devront y être remplacés par les N', T' et ρX, ρY, ρZ par $\rho X + N_2^0 \frac{d^2 u}{dy^2}$, $\rho Y + N_1^0 \frac{d^2 v}{dx^2}$, $\rho Z + N_1^0 \frac{d^2 w}{dx^2} + N_2^0 \frac{d^2 w}{dy^2}$.

En particulier, les trois équations indéfinies de l'équilibre seront, au lieu de (21) et (23 *bis*),

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned}
&P_x + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho X\, dz + Q_y \frac{d^2 u_0}{dy^2} + \frac{d\mathcal{N}_1}{dx} + \frac{d\mathcal{T}_3}{dy} = 0,\\
&P_y + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Y\, dz + Q_x \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{d\mathcal{T}_3}{dx} + \frac{d\mathcal{N}_2}{dy} = 0,\\
&P_z + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Z\, dz + Q_x \frac{d^2 w}{dx^2} + Q_y \frac{d^2 w}{dy^2}\\
&\qquad = \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^2 n_1}{dx^2} + 2\frac{d^2 t_3}{dx\,dy} + \frac{d^2 n_2}{dy^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Quant aux conditions spéciales au contour, il faudra suivre les mêmes méthodes qu'aux §§ I et III, c'est-à-dire chercher les composantes suivant un élément du contour de la couche moyenne, suivant la normale au cylindre contournant, et suivant une perpendiculaire à ces deux directions, de la force élastique exercée sur un élément du cylindre contournant, en tenant compte, dans les termes comparables à N_1^0, N_2^0, des petits changements amenés dans ces directions par les déplacements considérés, et ainsi des petites variations de grandeur éprouvées par les éléments superficiels du cylindre; puis on prendra les composantes et les moments, par rapport aux mêmes droites, des actions totales exercées sur une bande du cylindre comprise entre deux génératrices primitivement distantes de *ds*.

Mais je ne développerai pas ce sujet. Je me contenterai d'étudier l'effet de la rigidité sur les vibrations transversales d'une membrane constituée de la même manière sur toute sa surface, également tendue

en tout sens et isotrope autour de ses normales, enfin fixée à ses bords et assez flexible pour que le mouvement soit dû surtout aux tensions initiales. Si ρ_1 désigne la densité moyenne, $Q = Q_x = Q_y$ la tension initiale par unité de longueur du contour, la troisième formule (48), dont le second nombre deviendra celui de la dernière (25), donnera l'équation indéfinie du mouvement

$$(49) \qquad 2\varepsilon\rho_1 \frac{d^2 w}{dt^2} = Q\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2}\right) - \frac{2k\beta\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^4 w}{dx^4} + 2\frac{d^4 w}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4}\right).$$

Dans cette équation, le dernier terme, dû à la rigidité, est très-petit par rapport au second, dû à la tension initiale Q; on peut donc calculer la valeur de ce troisième terme en supposant à w la même forme que si la membrane était parfaitement flexible. Or, dans ce dernier cas, on aurait

$$(50) \qquad w = \sum W_i(A_i \cos m_i \omega t + B_i \sin m_i \omega t),$$

ω étant une constante, égale à $\sqrt{\frac{Q}{2\varepsilon\rho_1}}$, W_i une fonction de x, y, et m_i un nombre, tels que

$$(51) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 W_i}{dx^2} + \dfrac{d^2 W_i}{dy^2} + m_i^2 W_i = 0 & \text{en tout point de la membrane,} \\ W_i = 0, & \text{sur le contour,} \end{cases}$$

A_i, B_i des constantes arbitraires dépendant de l'état initial, et $\sum$ un signe de sommation s'étendant à toutes les valeurs possibles de m_i ou plutôt de m_i^2, valeurs qui sont, comme on le démontre aisément, essentiellement réelles, et même positives à part la première $m_0^2 = 0$ qui donne $W_0 = 0$. Pour des membranes de même forme, mais de longueur et de largeur différentes, les valeurs de m_i sont en raison inverse de l'une de ces dimensions; enfin, lorsque la membrane vibre dans sa totalité sans autres lignes nodales que ses bords, comme nous l'admettrons, on peut, à une première approximation, réduire w à son premier terme $W_1(A_1 \cos m_1 \omega t + B_1 \sin m_1 \omega t)$. Mais alors, si l'on dif-

férentie, soit deux fois par rapport à x, soit deux fois par rapport à y, la relation

$$\frac{d^2 W_1}{dx^2} + \frac{d^2 W_1}{dy^2} + m_1^2 W_1 = 0,$$

et que l'on ajoute les deux résultats, il vient

$$\frac{d^4 W_1}{dx^4} + 2\frac{d^4 W_1}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 W_1}{dy^4} = -m_1^2\left(\frac{d^2 W_1}{dx^2} + \frac{d^2 W_1}{dy^2}\right):$$

par suite, une première valeur approchée du dernier terme de (49) est

$$\frac{2k\beta\varepsilon^3 m_1^2}{3}\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2}\right),$$

et cette équation (49) devient

$$(52) \qquad 2\varepsilon\rho_1 \frac{d^2 w}{dt^2} = \left(Q + \frac{2k\beta\varepsilon^3 m_1^2}{3}\right)\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2}\right).$$

Donc, lorsqu'une membrane imparfaitement flexible vibre dans sa totalité sous l'effet d'une tension constante, ses vibrations se font sensiblement comme si elle était sans rigidité, mais que sa tension, par unité de longueur du contour, fût augmentée d'une quantité égale au produit des deux tiers du coefficient moyen d'élasticité de ses couches, appelé $k\beta$, par le cube de sa demi-épaisseur et par un nombre m_1^2, dépendant de la forme de la membrane et en raison inverse de sa surface. Si, par exemple, la membrane est rectangulaire, de longueur a et de largeur b, ce qui permet de prendre $W = \sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{i'\pi y}{b}$, i et i' étant deux entiers positifs, ce nombre m_1^2 correspond à $i = i' = 1$ et vaut $\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$.

Formules des augmentations que de petites déformations d'un solide apportent aux pressions ou forces élastiques, supposées considérables, qui déjà étaient en jeu dans son intérieur. — Complément et modification du préambule du Mémoire : Distribution des élasticités autour de chaque point, etc., *qui a été inséré en* 1863 *au* Journal de Mathématiques [*];

Par M. DE SAINT-VENANT.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Au commencement du Mémoire de 1863 cité, j'ai essayé de donner, des formules les plus générales des pressions dans un corps élastique déjà sollicité intérieurement avant les déformations subies, une démonstration nouvelle, susceptible d'être acceptée par ceux même qui, depuis quelques années, rejettent *à priori* tout calcul d'actions moléculaires dans la théorie de l'élasticité.

Mais des observations que je trouve fondées, et dont je remercie leurs auteurs, m'ont été faites sur quelques points de ce préambule, par M. Brill, *privat-docent* à l'université de Giessen, et surtout par M. Boussinesq, professeur à Gap, déjà bien connu des lecteurs du *Journal de Mathématiques*.

Elles ne portent sur aucune des conclusions du Mémoire de 1863, qui subsistent ainsi entières. Elles ne signalent pas non plus d'inexactitude dans les formules (2) [(c) ci-après], données au début et telles que je les comprenais, pour exprimer en fonction de déplacements (u, v, w) de grandeurs quelconques les trois *dilatations* et les trois

[*] 2e série, t. VIII, p. 26 à 282.

glissements (∂, g), quand on néglige les carrés et les produits de ces six quantités très-petites.

Mais on peut voir au même Mémoire qu'il est nécessaire de conserver ce qui vient de ces carrés et produits, lorsqu'on veut partir de l'expression du *potentiel* ou de l'*énergie latente* [*] résultant des produits des pressions par les petits mouvements que leurs réactions sont capables d'engendrer. Or, alors, comme on me l'a fait apercevoir, les formules en question exprimant les dilatations ∂ et glissements g ont besoin d'être complétées. Et il faut, par contre, compléter d'une manière analogue la première partie de la formule (9) du potentiel, en réparant ainsi deux omissions qui étaient d'autant plus sujettes à échapper qu'elles portent sur des quantités du second ordre habituellement supprimées, et qui, de plus, lorsqu'on les fait l'une avec l'autre, se compensent de manière à n'affecter aucunement le résultat à obtenir.

Ce résultat désiré n'était autre que le groupe connu des six formules complètes et exactes (10) [(*i*) ci-après], données par Cauchy, en 1829, pour les composantes des pressions à l'intérieur d'un solide élastique, dans le cas général où il y aurait déjà des pressions ou tensions considérables en jeu avant les déplacements relatifs subis par les divers points du corps. Mon but était, dis-je, de les établir d'une manière nouvelle, sans parler aucunement des actions entre molécules, fonctions continues de leurs distances, dont le calcul, depuis quelques années, est rejeté *à priori*, et à tort suivant moi, par un certain nombre de savants. Aujourd'hui j'aperçois clairement qu'il faut renoncer à contenter ainsi, par concession, une opinion qui n'est point la mienne; car l'expression du potentiel, complétée ainsi qu'on vient de le dire, ne peut être obtenue, comme me l'a fait remarquer M. Boussinesq, que par un calcul des forces moléculaires en jeu; et les formules mêmes de Cauchy ne peuvent être définies, quant aux coefficients qui y entrent, que par des sommes de fonctions de pareilles actions mutuelles; en sorte qu'elles ne peuvent pas être démontrées, ainsi que j'avais espéré le faire, en s'appuyant seulement

---

[*] Ce qui a été nommé l'*Ergiel* (*Comptes rendus*, 20 juin 1870, t. LXX, p. 1314), par M. Clausius, qui, avec d'autres physiciens, réserve le terme *potentiel* pour le seul cas de forces en raison inverse des carrés des distances où elles agissent.

sur la forme linéaire des formules de pressions : forme qui est acceptée par tout le monde, bien qu'on ne puisse la justifier que comme conséquence de ce que les pressions sont elles-mêmes des résultantes de ces actions réciproques, dont la considération, systématiquement repoussée, est ainsi inévitable à tous égards.

Comme ces points sont délicats et se rattachent à des considérations importantes, je vais, dans une *première partie,* entrer à leur égard dans quelques détails.

Puis, dans la *deuxième partie* de ce travail, je donnerai des formules propres à exprimer, au moyen de coefficients d'élasticité constants et susceptibles d'être mesurés expérimentalement d'avance pour chaque matière, les coefficients ou paramètres variables figurant dans les formules les plus générales des forces élastiques.

2. Au Mémoire cité de 1863, où

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z \quad \text{et} \quad g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$$

désignent les six *déformations élémentaires* (les *strains* des auteurs anglais) supposées toujours *très-petites*, d'un corps élastique au point dont les coordonnées rectangles sont

$$x, y, z,$$

c'est-à-dire 1° les dilatations subies par l'unité de longueur de trois petites lignes matérielles qui s'y croisaient dans des directions parallèles à ces coordonnées; et 2° les glissements, ou les cosinus des angles très-peu aigus qu'elles forment deux à deux après des déplacements de grandeurs du reste aussi considérables qu'on veut

$$u, \quad v, \quad w,$$

ou après que x, y, z sont devenus $x+u$, $y+v$, $z+w$, l'on démontre, dans la note du n° 2 qui est après les formules (3), qu'on a sans aucune erreur

$$(a) \qquad \partial_x = -1 + \sqrt{1 + 2\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2},$$

ou, ce qui revient identiquement au même,

$$(b)\quad\begin{cases} \partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2 = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2, \\ \text{et qu'on a aussi} \\ g_{yz}(1+\partial_y)(1+\partial_z) = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\frac{dw}{dz} \\ \text{avec quatre autres expressions semblables.} \end{cases}$$

Quand on peut négliger $\frac{1}{2}\partial_x^2$ devant ∂_x qui doit rester une fraction numérique fort petite pour que l'élasticité ne s'altère pas, et, de même, les produits de g_{yz} par ∂_y et ∂_z devant g_{yz}, l'on peut écrire

$$(c)\quad\begin{cases} \left.\begin{matrix}\partial_x \\ \text{et } g_{yz}\end{matrix}\right\} = \text{les seconds membres de } (b) \\ \text{et } \partial_y,\ \partial_z,\ g_{zx},\ g_{xy} = \text{des expressions analogues.} \end{cases}$$

Ce sont les formules (3) du nº **2** de mon Mémoire de 1863, que j'avais données depuis longtemps [*], et qui sont exactes, au degré d'approximation dont on se contente alors quant aux valeurs des ∂ et g.

Mais elles ne suffisent plus quand il s'agit, comme au nº suivant **3**, p. 273, 275 (et note), de substituer, aux $\partial_x, \ldots, g_{xy}$, leurs valeurs en u, v, w dans le potentiel, appelé Φ, des forces internes par unité de volume, pour appliquer à la manière de Lagrange, comme a fait M. Ch. Neumann pour un cas particulier [**], le principe des travaux virtuels à la variation $\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz\,\delta\Phi$ du potentiel total, afin de tirer, en en détachant trois intégrales doubles dont les limites sont sur l'enveloppe du corps, les expressions complètes (10) [(i) ci-après] des six composantes de pression. Il faut employer d'autres formules que (c), où les carrés et produits des ∂, g ne soient plus négligés. L'emploi du calcul des variations n'est alors possible qu'en supposant en même temps très-petits les déplacements u, v, w, supposition qu'on peut toujours faire, car on rend u, v, w très-petits en en retranchant une

---

[*] 1844 (*Société philomathique,* 26 mars, ou l'*Institut*, nº 537), et 1847 (*Comptes rendus,* 22 février, t. XXIV, p. 260.)

[**] *Journal de Crelle et Borchardt,* t. 57 (1860), 4ᵉ livraison, p. 303.

translation et une rotation générale du système quand les ∂, g sont très-petits eux-mêmes comme on le suppose toujours. Or, dans ces conditions, l'on peut tirer ∂_x et g_{yz} des formules plus complètes (b) : il suffit 1° de remplacer, dans la première, $\frac{1}{2}\partial_x^2$ par la moitié du carré du second membre, c'est-à-dire par $\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$, puisqu'on néglige les termes du troisième degré en u, v, w; 2° de diviser le second membre, pour la deuxième, par $1+\partial_y+\partial_z$, ce qui équivaut à le multiplier par $1-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}$, en ne supprimant toujours que des termes du troisième degré. Il en résulte les deux expressions suivantes, exactes jusqu'au deuxième degré inclusivement, tant des ∂, g que des $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$:

$$(d)\quad\left\{\begin{aligned}\partial_x &= \frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2,\\ g_{yz} &= (b)\ \text{moins}\ \left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)\\ &= \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}-\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz};\end{aligned}\right.$$

la première pouvant être obtenue aussi par le développement du radical de (a) comme puissance $\frac{1}{2}$ de $1+\left(2\frac{du}{dx}+\ldots\right)$, en ayant soin, comme me l'a fait remarquer M. Brill, de ne pas oublier *le troisième terme* du développement, qui est

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\left(2\frac{du}{dx}+\ldots\right)^2=-\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2.$$

5. Par contre, il faut, le potentiel étant toujours désigné, ainsi que les six composantes, parallèlement aux trois axes fixes coordonnés rectangles, des pressions sur l'unité de trois petites faces qui leur sont respectivement normales, se croisant au point (x, y, z)

$$(e)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{par } \Phi^0 \text{ et } p_{xx}^0,\ p_{yy}^0,\ p_{zz}^0,\ p_{yz}^0,\ p_{zx}^0,\ p_{xy}^0, \text{ avant}\\ \qquad\text{les déformations opérées } \partial,\ g;\\ \text{par } \Phi \text{ et } p_{xx},\ p_{yy},\ p_{zz},\ p_{yz},\ p_{zx},\ p_{xy} \text{ après;}\end{array}\right.$$

et, enfin, des portions de ces sept dernières quantités, composées de la même manière en fonction des distances moléculaires initiales que quand les pressions initiales $p^0_{xx}, \ldots, p^0_{xy}$ sont nulles,

$$(f) \qquad \text{par } \Phi^1 \text{ et } p^1_{xx},\ p^1_{yy},\ p^1_{zz},\ p^1_{yz},\ p^1_{zx},\ p^1_{xy};$$

il faut, dis-je, ainsi que me l'a fait remarquer M. Boussinesq, prendre pour l'expression du potentiel total Φ,

$$(g) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = \Phi^0 &+ p^0_{xx}(\partial_x + \tfrac{1}{2}\partial_x^2) + p^0_{yy}(\partial_y + \tfrac{1}{2}\partial_y^2) + p^0_{zz}(\partial_z + \tfrac{1}{2}\partial_z^2) \\ &+ p^0_{yz}\, g_{yz}(1+\partial_y)(1+\partial_z) + p^0_{zx}\, g_{zx}(1+\partial_z)(1+\partial_x) \\ &+ p^0_{xy}(1+\partial_x)(1+\partial_y) + \Phi^1, \end{aligned} \right.$$

et non pas la formule (9) $\Phi = \Phi^0 + p^0_{xx}\partial_x + \ldots + \Phi^1$ de 1863, dans laquelle le sextinôme qui figure entre Φ^0 et Φ^1 n'avait pas de termes du second degré, ou se réduisait à

$$(h) \qquad p^0_{xx}\partial_x + p^0_{yy}\partial_y + p^0_{zz}\partial_z + p^0_{yz}\, g_{yz} + p^0_{zx}\, g_{zx} + p^0_{xy}\, g_{xy}.$$

En effet, c'est à cette expression (g) qu'on arrive réellement, lorsqu'on établit par le calcul des forces moléculaires la valeur du potentiel Φ, ainsi qu'il a été fait à la dernière note du n° 5 du Mémoire de 1863 (p. 280-281), car on trouve, comme on peut voir en s'y reportant, avant le polynôme homogène du second degré (6) en $\partial_x, \ldots g_{yz}, \ldots$ à vingt et un termes, que Φ^1 représente, un sextinôme en $p^0_{xx}, \ldots p^0_{xy}$, dans lequel ce qui affecte ces six pressions p^0 revient aux seconds membres des équations exactes (b) ci-dessus. Or ces seconds membres représentent, d'après les premiers, non pas $\partial_x, \ldots g_{yz}, \ldots$ qui figurent dans (4), mais précisément $\partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2, \ldots, g_{yz}(1+\partial_y)(1+\partial_z), \ldots$, ou ce qui affecte les p^0 dans l'expression (g).

4. Si maintenant, dans l'expression complète (g) du potentiel Φ ainsi établie, nous mettons pour les ∂, g les expressions rectifiées (d), ce sera la même chose que d'y mettre les expressions (b) pour

$$\partial_x + \tfrac{1}{2}\partial_x^2, \ldots, \quad g_{yz}(1+\partial_y)(1+\partial_z), \ldots;$$

et, par conséquent, aussi la même chose que de substituer, comme j'ai fait en 1863, les expressions incomplètes (c) à $\partial_x,\ldots$, $g_{yz},\ldots$, dans la formule aussi incomplète (9) qu'on a pour Φ en effaçant les carrés et produits des ∂, g qui affectent les p^0 de la formule (g), ou en prenant l'expression (h) pour les six termes en p^0. On obtiendra donc, au moyen du calcul des variations appliquée en 1863, mais maintenant par le fait aux expressions nouvelles ou rectifiées (g) et (d) ou (b), pour les composantes des pressions aux limites ou sur les éléments $d\Omega$ d'une surface enveloppe Ω du corps ou d'une quelconque de ses portions finies, on obtiendra, dis-je, précisément et encore les formules complètes de composantes de pression, établies en 1829 [*] par Cauchy à la suite d'un calcul des résultantes des forces moléculaires supposées n'être sensibles qu'à des distances insensibles [calcul résumé à la note après ces formules (10) de 1863]; formules qui sont :

$$(i)\quad\begin{cases} p_{xx} = p^0_{xx}\left(1+\dfrac{du}{dx}-\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{dw}{dz}\right)+2p^0_{xy}\dfrac{du}{dy}+2p^0_{zx}\dfrac{du}{dz}+p^1_{xx},\\ p_{yy}=\ldots,\quad p_{zz}=\ldots,\\ p_{yz} = p^0_{yz}\left(1-\dfrac{du}{dx}\right)+p^0_{yy}\dfrac{dw}{dy}+p^0_{zz}\dfrac{dv}{dz}+p^0_{zx}\dfrac{dv}{dx}+p^0_{xy}\dfrac{dw}{dx}+p^1_{yz},\\ p_{zx}=\ldots,\quad p_{xy}=\ldots, \end{cases}$$

pouvant être écrites sous cette forme très-symétrique :

$$(i\,bis)\quad\begin{cases} p_{xx}=p^0_{xx}\left(1-\dfrac{du}{dx}-\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{dw}{dz}\right)+2\left(p^0_{xx}\dfrac{du}{dx}+p^0_{xy}\dfrac{du}{dy}+p^0_{zx}\dfrac{du}{dz}\right)+p^1_{xx},\\ p_{yz}=p^0_{yz}\left(1-\dfrac{du}{dx}-\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{dw}{dz}\right)\\ \qquad+\left(p^0_{yx}\dfrac{dw}{dx}+p^0_{yy}\dfrac{dw}{dy}+p^0_{yz}\dfrac{dw}{dz}\right)+\left(p^0_{zx}\dfrac{dv}{dx}+p^0_{zy}\dfrac{dv}{dy}+p^0_{zz}\dfrac{dv}{dz}\right)+p^1_{yz}, \end{cases}$$

où $p^1_{xx},\ldots$, $p^1_{yz},\ldots$ désignent toujours les six dérivées sextinômes, par rapport à $\partial_x,\ldots$, $g_{yz},\ldots$ respectivement, de la partie à vingt et un

[*] *Exercices de mathématiques*, 4e année, p. 138, form. (36), (37).

termes du second degré [(6) de 1863]

$$(j) \qquad \Phi' = \frac{1}{2} a_{xxxx} \partial_x^2 + \ldots + \frac{1}{2} a_{yzyz} g_{yz}^2 + \ldots + a_{yyxy} \partial_y g_{xy},$$

du potentiel Φ, c'est-à-dire les expressions

$$(k) \quad \begin{cases} p_{xx}^1 = a_{xxxx} \partial_x + a_{xxyy} \partial_y + a_{xxzz} \partial_z + a_{xxyz} g_{yz} + a_{xxzx} g_{zx} + a_{xxxy} g_{xy}, \\ p_{yy}^1 = \ldots, \qquad p_{zz}^1 = \ldots, \\ p_{yz}^1 = a_{yzxx} \partial_x + a_{yzyy} \partial_y + a_{yzzz} \partial_z + a_{yzyz} g_{yz} + a_{yzzx} g_{zx} + a_{yzxy} g_{xy}, \\ p_{zx}^1 = \ldots, \qquad p_{xy}^1 = \ldots; \end{cases}$$

semblables à celles (1) du Mémoire de 1863.

Les adversaires des considérations moléculaires croient, comme on a dit, pouvoir poser ces expressions (k) de prime abord, pour le cas particulier et ordinaire de nullité des p^0, comme *fonctions linéaires* des $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$; mais c'est admettre implicitement, comme nous avons dit, la grande loi physique que tous les faits prouvent, et dont l'invocation patente est seule propre à lever les incertitudes que cette manière douteuse de raisonner laisse subsister.

Quant à la partie de l'intégrale triple qui reste après qu'on a détaché les intégrales doubles donnant les pressions aux limites ou sur l'enveloppe Ω, elle sera aussi la même que si la double modification à l'expression de Φ et aux expressions des ∂ et g n'avait pas été opérée; en sorte qu'elle restera telle qu'elle est à la formule (15) de la note du n° 3 du Mémoire de 1863; et les équations différentielles indéfinies qu'on dit, au n° 4, pouvoir en être tirées, seront toujours les équations (19).

5. Mais on voit que cette manière d'obtenir soit les six formules complètes (10) ou (i) de pressions, soit les trois équations différentielles complètes (19), et qui consiste à les tirer de l'expression préalablement établie du potentiel, ne dispense nullement du calcul des forces moléculaires, car l'expression rectifiée ou complétée (g) du potentiel ne s'obtient qu'au moyen d'un pareil calcul.

Même, il faut bien le remarquer, les coefficients d'élasticité, tels que a_{xxxx}, qui entrent dans les sextinômes $p_{xx}^1, \ldots, \ldots, p_{yz}^1, \ldots$ des for-

mules (i) de Cauchy *ne peuvent être définis que par ces forces*, car ce sont les sommes (12) (de la note du n° 5) :

$$(l) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{2} \mathrm{S} \frac{m}{r} \frac{d\frac{fr}{r}}{dr} (\mathrm{x}^4 \text{ ou } \mathrm{y}^2\mathrm{z}^2 \text{ ou } \mathrm{y}^3\mathrm{z} \text{ ou } \mathrm{x}^2\mathrm{yz}) \\ \quad = \mathrm{a}_{xxxx} \text{ ou } \mathrm{a}_{yzyz} \text{ ou } \mathrm{a}_{yyyz} \text{ ou } \mathrm{a}_{xxyz} \end{array} \right.$$

de fonctions des distances moléculaires r dont x, y, z désignent les projections sur les axes fixes, fr représentant l'action mutuelle inconnue de deux molécules à la distance r par unité de masse, et ρ étant la densité qui dépend aussi des distances où sont les molécules les unes des autres.

Leurs expressions (l) en r ont les mêmes formes que quand les pressions primitives p^0 étaient nulles, ou que le corps se trouvait dans l'état dit *naturel* avant les déplacements u, v, w de ces points. Mais les grandeurs de ces coefficients $\mathrm{a}_{\ldots}$ dépendent des grandeurs qu'avaient les distances moléculaires r lorsque les pressions étaient $p^0_{xx}, \ldots, p^0_{xy}$. Or les distances elles-mêmes dépendent des intensités de ces pressions p^0, qu'il faut supposer considérables pour que les termes des formules (i) où elles sont multipliées par les dérivées de u, v, w ne soient pas négligeables. Les coefficients d'élasticité $\mathrm{a}_{xxxx}, \ldots, \mathrm{a}_{yyyz}$, et, par suite, les parties $p^1_{xx}, \ldots$ des formules (i) ou (i *bis*) dépendent ainsi, implicitement et nécessairement, à un certain degré de leurs parties $p^0_{xx}, \ldots, p^0_{xy}$.

6. Au reste, il n'y *que les premiers termes* des formules (i) de Cauchy, savoir :

$$\text{pour } p_{xx}, \quad p^0_{xx}\left(1 + \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right), \quad \text{et, pour } p_{yz}, \quad p^0_{yz}\left(1 - \frac{du}{dx}\right),$$

dont la forme ait besoin d'être établie par un calcul d'actions moléculaires. Les autres termes, affectés des pressions primitives p^0 résultent simplement du petit changement que les déplacements des points ont opéré dans l'orientation des plans sur lesquels ces pressions s'exerçaient, et ils peuvent être obtenus en mettant seulement en œuvre le

théorème de l'équilibre du tétraèdre élémentaire, qui régit les changements de plans de pression [*].

En effet, les formules connues de changement de plans de pression, fournies immédiatement par ce théorème, donnent, pour les composantes, suivant des directions nouvelles x', y', z', rectangulaires ou obliques, des pressions sur l'unité de faces qui leur sont normales, les expressions suivantes, si $c_{zx'}$, $c_{yz'}$, etc., désignent les cosinus des angles de z avec x', de y avec z', et si l'on suppose que x', y', z' ne font que de très-petits angles avec les directions rectangulaires x, y, z respectivement, en sorte qu'on puisse remplacer les trois cosinus $c_{xx'}$, $c_{yy'}$, $c_{zz'}$ par l'unité, et effacer les carrés et les produits deux à deux des six autres cosinus

$$(m)\qquad \begin{cases} p_{x'x'} = p_{xx} + 2p_{xy}c_{x'y} + 2p_{zx}c_{x'z}, \\ p_{y'z'} = p_{yz} + p_{yy}c_{z'y} + p_{zz}c_{y'z} + p_{zx}c_{y'x} + p_{xy}c_{z'x}. \end{cases}$$

Or si les directions x', y', z' sont suivant les perpendiculaires aux trois facettes dans lesquelles les petits déplacements u, v, w ont changé celles yz, zx, xy, ces six cosinus ont des valeurs connues [**], à savoir :

$$(n)\qquad \begin{cases} c_{x'y} = -\dfrac{du}{dy}, & c_{x'z} = -\dfrac{du}{dz}, & c_{y'z} = -\dfrac{dv}{dz}, \\ c_{y'x} = -\dfrac{dv}{dx}, & c_{z'x} = -\dfrac{dw}{dx}, & c_{z'y} = -\dfrac{dw}{dy}, \end{cases}$$

ce qui change ces formules en

$$(o)\qquad \begin{cases} p_{x'x'} = p_{xx} - 2p_{xy}\dfrac{du}{dy} - 2p_{zx}\dfrac{du}{dz}, \\ p_{y'z'} = p_{yz} - p_{yy}\dfrac{dw}{dy} - p_{zz}\dfrac{dv}{dz} - p_{zx}\dfrac{dv}{dx} - p_{yx}\dfrac{dw}{dx}. \end{cases}$$

---

[*] Je l'ai déjà montré aux Notes sur Navier (Appendice III, § 23), ainsi qu'au n° 278 des *Leçons de Mécanique analytique*, publiées d'après Cauchy, etc., par M. l'abbé Moigno.

[**] Formules (16) d'une Note du n° 3 du Mémoire de 1863. Elles avaient été données par Poisson, au XXe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 39.

Tirant p_{xx}, p_{yz}, l'on peut, dans les termes contenant comme facteurs les $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, remplacer les p_{xy}, p_{zx}, p_{yy}, ... par leurs valeurs primitives p^0_{xy}, ..., dont elles ne diffèrent que de quantités affectées des mêmes dérivées très-petites. Il en résulte

$$(p)\quad \begin{cases} p_{xx} = p_{x'x'} + 2p^0_{xy}\dfrac{du}{dy} + 2p^0_{zx}\dfrac{du}{dz}, \\ p_{yz} = p_{y'z'} + p^0_{yy}\dfrac{dw}{dy} + p^0_{zz}\dfrac{dv}{dz} + p^0_{zx}\dfrac{dv}{dx} + p^0_{xy}\dfrac{dw}{dx}. \end{cases}$$

Comparant à (i), l'on voit qu'il ne manque plus, pour que les formules de Cauchy soient démontrées, que d'établir qu'on a

$$(q)\quad \begin{cases} p_{x'x'} = p^0_{xx}(1 + \partial_x - \partial_y - \partial_z) + p^1_{xx}, \\ p_{y'z'} = p^0_{yz}(1 - \partial_x) + p^1_{yz}. \end{cases}$$

Or, la question étant réduite à ces termes, les considérations de mécanique moléculaire qui la résolvent, à la manière de la Note après les formules (10), sont tellement simples, que personne, ce me semble, ne doit se refuser à leurs conséquences. Il suffit, en ne supposant pas d'autres déformations que les trois dilatations ∂_x, ∂_y, ∂_z, de reconnaître que les parties de $p_{x'x'}$, $p_{y'z'}$ qui ne dépendent pas des augmentations $d\frac{fr}{r}$ du quotient des intensités fr des forces par les petites distances r où elles agissent, doivent excéder p^0_{xx}, p^0_{yz} dans les proportions respectives des accroissements du carré x^2 et du produit yz des projections des r sur x, et sur y, z, sauf toutefois ce qui résulte de la diminution de la densité qui, d'une autre part, doit faire diminuer proportionnellement les sommes de composantes d'actions (même Note). Il en résulte, en effet, que les parties de $p_{x'x'}$, $p_{y'z'}$ dont on parle sont égales aux produits $p^0_{xx}(1 + \partial_x)^2$, $p^0_{yz}(1 + \partial_y)(1 + \partial_z)$ divisés l'un et l'autre par $(1 + \partial_x)(1 + \partial_y)(1 + \partial_z)$ rapport des densités; ce qui revient bien à (q) ou aux premiers termes de (i).

On arrive, comme on voit, très-simplement à ces formules com-

plètes (i) [*] de composantes de pressions dues à Cauchy [**], et composées d'une partie en p^0 et d'une partie en a....

7. Ces deux parties affectées, l'une des pressions antérieures p^0, l'autre des coefficients d'élasticité a ..., sont distinctes aussi dans l'expression générale (g) du potentiel ou de l'énergie latente Φ des forces intérieures, où les p^0 comme les a... se trouvent multipliés par les dilatations et glissements, ainsi que par leurs carrés et produits deux à deux.

Plusieurs auteurs ordonnent d'une autre manière l'expression de Φ. Ils développent ce potentiel en portions polynômes, composées respectivement des termes du premier, du second, du troisième,... degré en $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$, en ne conservant toutefois que les termes des deux premiers degrés. Il en résulte que le sextinôme (h) $p^0_{xx}\partial_x + \ldots$ se trouve substitué, dans leurs formules, à celui $p^0_{xx}(\partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2) + \ldots$ qui figure dans (g), ou qu'ils posent l'expression

$$(r)\quad \Phi = \Phi^0 + p^0_{xx}\partial_x + p^0_{yy}\partial_y + p^0_{zz}\partial_z + p^0_{yz}g_{yz} + p^0_{zx}g_{zx} + p^0_{xy}g_{xy} + \Phi^{(2)},$$

dans laquelle $\Phi^{(2)}$ est, comme Φ^1, un polynôme complet et homogène du second degré en $\partial_x, \ldots, g_{xy}$ à vingt et un termes.

Il en résulte, si l'on appelle $p^{(2)}_{xx}, p^{(2)}_{yy}, p^{(2)}_{zz}, p^{(2)}_{yz}, p^{(2)}_{zx}, p^{(2)}_{xy}$ les dérivées $\frac{d\Phi^{(2)}}{d\partial_x}, \frac{d\Phi^{(2)}}{d\partial_y}, \ldots, \frac{d\Phi^{(2)}}{dg_{xy}}$ de ce polynôme par rapport aux six déformations élémentaires ∂, g, que l'on a simplement

$$(s)\quad \frac{d\Phi}{d\partial_x} = p^0_{xx} + p^{(2)}_{xx},\quad \frac{d\Phi}{d\partial_y} = p^0_{yy} + p^{(2)}_{yy}, \ldots\quad \frac{d\Phi}{dg_{xy}} = p^0_{xy} + p^{(2)}_{xy},$$

---

[*] On peut, vu les expressions (70) données au n° 14 du Mémoire de 1863 pour les petites rotations *moyennes* τ_x, τ_y, τ_z, qui ont lieu autour des trois axes, y remplacer $\frac{du}{dy}$ par $\tau_z + \frac{1}{2}g_{yz}$, $\frac{dv}{dz}$ par $-\tau_x + \frac{1}{2}g_{yz}$, et ainsi des autres; et n'avoir plus ainsi, dans ces formules, que des dilatations ∂, des glissements g, et des rotations τ.

[**] Elles ont été adoptées finalement par Poisson pour les corps isotropes [*Journal de l'École Polytechnique*, XXe cahier, form. (10), p. 52].

tandis qu'on a, avec l'expression (g) du même potentiel Φ,

$$(t)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\Phi}{d\partial_x} = p^0_{xx}(1+\partial_x) + p^0_{xy}\,g_{xy} + p^0_{zx}\,g_{zx} + p^1_{xx},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\frac{d\Phi}{dg_{yz}} = p^0_{yz}(1+\partial_y+\partial_z) + p^1_{yz},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Il en résulte aussi, en appliquant à cette expression (r) de Φ le calcul des variations à la manière de Lagrange et de M. Ch. Neumann, comme on a fait (nº 4 ci-dessus), pour celle (q), c'est-à-dire après y avoir mis les expressions complètes (d) pour les ∂ et g, qu'on obtient, au lieu des formules (i) de Cauchy, les suivantes :

$$(u)\quad \left\{\begin{aligned} &p_{xx} = p^0_{xx}\left(1-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right) - p^0_{xy}\left(\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right) + p^0_{zx}\left(\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}\right) + p^{(2)}_{xx},\\ &\qquad p_{yy} = \ldots, \qquad\qquad\qquad p_{zz} = \ldots,\\ &p_{yz} = p^0_{yz}\left(1-\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right) + p^0_{yy}\frac{dw}{dy} + p^0_{zz}\frac{dv}{dz} + p^0_{zx}\frac{dv}{dx} + p^0_{xy}\frac{dw}{dx} + p^{(2)}_{yz},\\ &\qquad p_{zx} = \ldots, \qquad\qquad\qquad p_{xy} = \ldots; \end{aligned}\right.$$

qui, pas plus que les expressions (i), ne sont les dérivées de Φ ou de toute autre fonction par rapport à six variables quelconques, mais où on reconnaît bien que les derniers termes

$$p^{(2)}_{xx}, \ldots, \quad p^{(2)}_{yz}, \ldots$$

doivent être, comme $p^1_{xx}, \ldots, p^1_{yz}, \ldots$, les six dérivées respectives d'une même fonction par rapport à $\partial_x, \ldots, g_{yz}, \ldots$; car, en retranchant respectivement les six expressions (u) des six expressions (i), qui n'en diffèrent que par la forme, l'on a des équations dont on tire, pour les différences

$$p^{(2)}_{xx} - p^1_{xx}, \ldots, \quad p^{(2)}_{yz} - p^{(1)}_{yz}, \ldots,$$

des expressions qui sont bien les six dérivées par rapport à $\partial_x, \ldots,$

$g_{yz}, \ldots$ d'une même fonction, savoir :

$$\Phi^{(2)} - \Phi^{(1)} = \tfrac{1}{2} p^0_{xx}\partial_x^2 + \tfrac{1}{2} p^0_{yy}\partial_y^2 + \tfrac{1}{2} p^0_{zz}\partial_z^2 + p^0_{yz} g_{yz}(\partial_y + \partial_z) + p^0_{zx} g_{zx}(\partial_z + \partial_x) + p^0_{xy} g_{xy}(\partial_x + \partial_y).$$

Et ces six portions de pression,

$$p^{(2)}_{xx}, \ldots, \ldots, \quad p^{(2)}_{yz}, \ldots, \ldots,$$

sont, comme celles $p^1_{xx}, \ldots$, des sextinômes en $\partial_x, \ldots, g_{yz}, \ldots$ affectés de coefficients qui, étant appelés

$$a'_{xxxx}, \ldots, \quad a'_{yzyz}, \ldots, \quad a'_{xxyz}, \ldots,$$

sont reconnus égaux à ceux $a_{xxxx}, \ldots$, de mêmes indices, des p^1_{xx}, sauf les neuf a′ suivants, dont voici les relations avec les $a_{\ldots}$ et les p^0 :

$$(v) \left\{ \begin{aligned} & a'_{xxxx} = a_{xxxx} + p^0_{xx}, \quad a'_{yyyy} = a_{yyyy} + p^0_{yy}, \quad a'_{zzzz} = a_{zzzz} + p^0_{zz}, \\ & a'_{yyyz} = a_{yyyz} + p^0_{yz}, \quad a'_{zzyz} = a_{zzyz} + p^0_{yz}, \\ & a'_{zzzx} = a_{zzzx} + p^0_{zx}, \quad a'_{xxzx} = a_{xxzx} + p^0_{zx}, \\ & a'_{xxxy} = a_{xxxy} + p^0_{xy}, \quad a'_{yyxy} = a_{yyxy} + p^0_{xy}. \end{aligned} \right.$$

M. Boussinesq arrive aux formules des composantes des pressions, en partant d'une de celles du potentiel, par une méthode à quelques égards plus directe que l'application du calcul des variations. Il établit d'abord [*], par une analyse exacte et délicate, et pour des grandeurs *quelconques* des déplacements u, v, w, ne produisant toutefois que des déformations ∂, g exprimées par les formules (b) ci-dessus, une expression très-générale donnant le travail total des forces élastiques intérieures sur l'unité de volume d'un élément, ou l'augmentation de leur potentiel Φ, pendant un instant dt; et il en tire les expressions de ces six forces $p_{xx}, p_{yy}, \ldots, p_{xy}$ en fonction des dérivées de Φ par rapport aux neuf $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, puis, au moyen d'une transformation, par rapport aux six déformations élémentaires $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$. Elles se ré-

[*] Note complémentaire, présentée le 5 septembre 1870 (*Comptes rendus*, t. LXXI, p. 400), à son Mémoire *sur les ondes liquides périodiques*, qui va paraître au tome XX du *Recueil des Savants étrangers*.

duisent, dans les cas où l'on peut négliger les carrés et produits de ces quantités, à

$$(x)\left\{\begin{aligned} p_{xx} &= (1 - \partial_y - \partial_z)\frac{d\Phi}{d\partial_x} + \left(2\frac{du}{dz} - g_{zx}\right)\frac{d\Phi}{dg_{zx}} + \left(2\frac{du}{dy} - g_{xy}\right)\frac{d\Phi}{dg_{xy}}, \\ p_{yz} &= (1 - \partial_x - \partial_y - \partial_z)\frac{d\Phi}{dg_{yz}} + \frac{dw}{dy}\frac{d\Phi}{d\partial_y} + \frac{dw}{dz}\frac{d\Phi}{d\partial_z} + \frac{dv}{dx}\frac{d\Phi}{dg_{zx}} + \frac{dw}{dx}\frac{d\Phi}{dg_{xy}}. \end{aligned}\right.$$

En y substituant les six expressions (s) des $\frac{d\Phi}{d\partial_x},\cdots$ répondant à l'adoption de la deuxième forme (r) du potentiel, leurs secondes parties $p^{(2)}$, qui sont des sextinômes en $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$, quantités très-petites du premier ordre, disparaissent des termes où les $d\Phi$ se trouvent multipliés par les ∂, g, ou par les dérivées de u, v, w, aussi de cet ordre. De cette substitution, en mettant pour les $\partial_x,\ldots, g_{xy}$ les valeurs $\frac{du}{dx};\cdots;\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}$, auxquelles ils se réduisent quand on néglige les petites quantités du second ordre, M. Boussinesq obtient bien, comme on voit, les formules nouvelles (u) des pressions.

Mais il est bon de remarquer qu'on obtient évidemment de la même manière celles (i) de Cauchy. Il suffit pour cela de substituer, dans (x), les dérivées de Φ prises sous la forme (t).

8. On peut sans aucun doute, en général, se servir à volonté des formules (i) de Cauchy, qui sont en rapport avec celle (g) $\Phi = \Phi_0 + p^0_{xx}(\partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2) + \ldots$ du potentiel, ou des formules (u) en rapport avec celle (r) $\Phi = \Phi_0 + p^0_{xx}\partial_x + \ldots$. Celles-ci donnent une expression un peu plus simple au potentiel, et, surtout, à ses six dérivées (s) $\frac{d\Phi}{d\partial_x} = p^0_{xx} + p^{(2)}_{xx},\ldots$, auxquelles M. Boussinesq a reconnu une certaine signification géométrique, et où l'on voit que les $p^{(2)}$ représentent toutes les parties variables ou affectées des ∂, g, tandis qu'avec l'expression (g) les parties variables ne sont pas toutes renfermées dans les sextinômes appelés p^1.

On pourra préférer, peut-être, les formes nouvelles (r), (u) dans les questions où les pressions p^0, antérieures aux déplacements supposés u, v, w, ont des intensités constantes, et où la variété des cas ne porte ainsi que sur les grandeurs des u, v, w, ou des déformations ∂, g,.... C'est ce qui peut avoir lieu pour la théorie de la lumière.

Mais dans les questions où les pressions primitives p^0 varieront d'intensité d'un cas à l'autre, je regarde comme préférable d'employer les formules de Cauchy (i) des pressions ultérieures p, et celle (g) du potentiel, où les coefficients des polynômes p^1 et Φ^1 ne sont que ceux d'élasticité ayant les significations (l) $\frac{\rho}{2}S\ldots$, sauf, si l'on ne peut pas attribuer à ces paramètres, avec une suffisante approximation, des grandeurs numériques constantes et connues, à déduire leurs valeurs des formules de la *deuxième partie* ci-après.

Sans doute, de même qu'on peut prouver que les pressions ou forces élastiques doivent avoir des expressions linéaires en $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ par la raison (qui me paraît la seule à en donner [*]) qu'elles résultent d'actions qui sont fonctions continues des distances moléculaires, et qui varient ainsi proportionnellement aux changements supposés très-petits de ces distances, de même on est en droit de prononcer, en se basant toujours et inévitablement sur la même loi, que le potentiel Φ, somme de produits des actions tant antérieures que nouvelles, par les petits changements des distances, doit être une fonction du second degré des mêmes neuf dérivées u, v, w, et, par suite, des six déformations ∂, g. Mais rien ne dit qu'il convienne de séparer l'expression de Φ en portion du premier degré et portion du deuxième, en ne tenant point compte de ce que la même loi physique apprend sur la composition de ses coefficients [**].

---

[*] Mémoire cité de 1863, n° 2, p. 262; et aussi, Mémoire sur la torsion, au tome XIV des *Savants étrangers*, n° 12, et Notes sur Navier, Appendice III, § 20, p. 555, 556.

[**] On peut remarquer encore que les formules (i) ou $(i\ bis)$ de Cauchy, substituées dans l'une quelconque des trois équations d'équilibre, par exemple

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} + \rho X = 0,$$

donnent, pour la partie en p^0, un sextinôme très-symétrique [équation (19) de 1863]; tandis que celles (u), substituées de même, donnent un polynôme dont la composition est bien moins simple, et peut faire juger que les formules dont il vient sont moins dans la nature de la question.

Ajoutons, au reste, que le choix entre les deux formes n'intéresse aucunement la question controversée du nombre des coefficients d'élasticité $a_{xxxx}, \ldots$; car, d'après les relations (ν) de neuf d'entre eux avec ceux $a'_{xxxx} \ldots$ de mêmes indices, s'il est établi, comme je le pense, que les premiers se réduisent à *quinze* inégaux à cause des six égalités complémentaires (8) $a_{yyzz} = a_{yzyz}$, $a_{xxyz} = a_{zxxy}, \ldots$ (du n° 5 du Mémoire de 1863) entre les douze que ces relations (ν) ne contiennent pas, les seconds a' se réduisent tout aussi bien à quinze, au lieu d'être au nombre de vingt et un comme le pensent les adversaires de l'emploi du calcul des forces agissant suivant les lignes de jonction des molécules. Ce n'est, en effet, que par suite d'une réunion opérée, ou plutôt d'une sorte de confusion, des termes $p^0 \dfrac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ qui apparaissent distincts dans les formules soit (i), soit (u), avec ceux des parties sextinômes p^1 ou $p^{(2)}$ de ces formules, qu'ont pu prendre naissance les erreurs [*] que Wertheim a cru étayer d'expériences aujourd'hui mieux interprétées [**], et prouvant seulement (et tout au plus) la non-isotropie des matières sur lesquelles il opérait.

DEUXIÈME PARTIE [***].

9. On a dit (n° 5) que les coefficients

$$a_{xxxx}, \ldots, \quad a_{xxyz}, \ldots, \quad a_{yyzx}, \ldots$$

affectant les $\partial_x, \ldots$, $g_{yz}, \ldots$ dans les parties sextinômes (k) $p^1_{xx}, \ldots$, $p^1_{yz}, \ldots$ des formules complètes (i) ou $(i\ bis)$ des pressions dans l'intérieur

---

[*] *Voir* §§ 51 et suivants de l'Appendice V de la 3ᵉ édition, annotée (1864), des *Leçons de Navier*.

[**] *Voir* l'extrait (2 août 1869) d'un Mémoire de M. Cornu aux *Comptes rendus*, t. LXIX, p. 334 et 336.

[***] Ce qui y est traité a déjà été le sujet d'une Note présentée le 19 septembre 1870 à l'Académie et insérée aux *Comptes rendus* des 27 mars et 3 avril 1871, t. LXXII, p. 355 et 391.

d'un corps, dépendaient à un certain degré des six composantes

$$p^0_{xx},\ p^0_{xy},\dots,\ p^0_{yz},\dots,\ p^0_{xy}$$

de celles qui y étaient en jeu au moment où il a commencé à subir les petites déformations que les $\partial_x,\dots$, $g_{yz},\dots$ mesurent.

En effet, les quinze coefficients, que nous écrirons plus souvent

$$a_{x^4},\ a_{y^2z^2},\dots,$$

ont les expressions (l)

$$(a')\quad a_{x^4}\text{ ou } a_{y^2z^2}\text{ ou } a_{y^3z}\text{ ou } a_{x^2yz}=\frac{\rho}{2}\mathbf{S}\,m\frac{d\frac{fr}{r}}{rdr}(\mathrm{x}^4\text{ ou }\mathrm{y}^2\mathrm{z}^2\text{ ou }\mathrm{y}^3\mathrm{z}\text{ ou }\mathrm{x}^2\mathrm{yz}).$$

Or les distances r, leurs projections x, y, z, et, aussi, la densité ρ, figurant dans ces expressions, dépendent elles-mêmes de ces pressions p^0 qui tenaient les molécules plus ou moins rapprochées entre elles et tournées de diverses manières.

Cette dépendance est faible lorsque les p^0 ne sont que de l'ordre de grandeur des p^1, et qu'en même temps les déformations produites $\partial_x,\dots$, $g_{yz},\dots$ sont assez petites pour ne point changer d'une manière permanente la contexture élastique qu'avait le corps au moment où les pressions n'étaient que les p^0. Alors on peut réduire les formules (i) ou (u) à

$$(b')\qquad p_{xx}=p^0_{xx}+p^1_{xx},\dots,\ \dots,\quad p_{yz}=p^0_{yz}+p^1_{yz},\dots,\ \dots,$$

puisqu'on peut alors négliger les produits des p^0 par les ∂, g qui ne doivent être que de très-petites fractions. Alors encore on peut trèsbien adopter pour les coefficients $a_{xxxx},\dots$ des valeurs qui auraient été mesurées expérimentalement d'avance pour un état où les pressions intérieures seraient sensiblement nulles, si, de cet état à celui où les pressions sont les p^0, il n'y a pas de déformations permanentes; ce que justifie la constante reconnue, dans de certaines limites, du *module d'élasticité* de traction ou de flexion des prismes élastiques.

Mais il n'en est pas de même lorsque les p^0 sont assez considérables (même dans les limites de la conservation de la contexture) pour qu'il faille tenir compte de leurs produits par les dérivées $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$ des déplacements, c'est-à-dire de tous les termes des formules (i).

Or, on ne peut pas supposer que les coefficients $a_{xxxx}, \ldots$ aient été mesuré d'avance pour tous les systèmes possibles de ces pressions primitives p^0.

Nous allons donc chercher à déterminer les valeurs des coefficients

$$a_{x^4}, \quad a_{y^2z^2}, \quad a_{y^3z}, \quad a_{x^2yz}$$

relatifs à un état du corps, tel que celui où les pressions sont

$$p^0_{xx}, \ldots, \quad \ldots, \quad p^0_{yz}, \ldots, \quad \ldots,$$

en fonction de coefficients analogues mesurés pour un état constant et antérieur, coefficients que nous appellerons

$$a^0_{x^4}, \ a^0_{x^2z^2}, \ldots, \quad a^0_{y^2z^2}, \ldots, \quad a^0_{x^2yz}, \ldots,$$

et des dérivées des déplacements que ses points ont éprouvés de cet état à l'autre. Cet état antérieur sera, par exemple, l'état dit *naturel* où les pressions sont toutes nulles, ou bien, plutôt, l'état *habituel* où elles se réduisent à ce qui vient de la pression atmosphérique, ainsi que du poids propre du corps et des réactions de ses appuis.

10. Pour arriver à cette détermination, nous n'avons qu'à transformer l'expression générale (a') des coefficients $a_{\ldots}$ par le même moyen dont s'est servi Cauchy (note du n° 3 de mon Mémoire de 1863) pour transformer celle

$$(c') \qquad p_{xx} \quad \text{ou} \quad p_{yz} = \frac{\rho_1}{2} \mathrm{S} m \frac{fr_1}{r_1} (\mathrm{x}_1^2 \ \text{ou} \ \mathrm{y}_1 \mathrm{z}_1),$$

où ρ_1, r_1, x_1, y_1, z_1 étaient relatifs à l'état qui suit les déplacements u, v, w, en une autre ne contenant que ρ, r, x, y, z relatifs à l'état qui les a immédiatement précédés.

Appelons donc

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0$$

les coordonnées (toujours rectangles et rapportées aux mêmes axes fixes), dans un état antérieur connu, du point M, ayant pour coordonnées x, y, z dans l'état subséquent où les pressions sont les p^0; et

$$u_0, \quad v_0, \quad w_0,$$

$$\partial^0_x, \ \partial^0_y, \ \partial^0_z, \quad g^0_{yz}, \ g^0_{zx}, \ g^0_{xy},$$

ces déplacements, dilatations et glissements, supposés petits (mais pouvant être bien plus considérables que ceux u, v, w, $\partial_x, \ldots, g_{xy}$), que le même point M a dû subir pour passer du premier état au second. Nous aurons

$$(d')\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + \frac{du_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \frac{du_0}{dy_0}\mathrm{y}_0 + \frac{du_0}{dz_0}\mathrm{z}_0 + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2u_0}{dx_0^2}\mathrm{x}_0^2 + \ldots\right),\\
&\mathrm{y} = \mathrm{y}_0 + \frac{dv_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \ldots,\qquad \mathrm{z} = \mathrm{z}_0 + \frac{dw_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \ldots;\\
&\mathrm{x}^4 = \mathrm{x}_0^4 + 4\mathrm{x}_0^3\left(\mathrm{x}_0\frac{d}{dx_0} + \mathrm{y}_0\frac{d}{dy_0} + \mathrm{z}_0\frac{d}{dz_0}\right)u_0 + \ldots,\\
&\mathrm{y}^2\mathrm{z}^2 = \mathrm{y}_0^2\mathrm{z}_0^2 + 2\mathrm{y}_0\mathrm{z}_0\left(\mathrm{x}_0\frac{d}{dx_0} + \mathrm{y}_0\frac{d}{dy_0} + \mathrm{z}_0\frac{d}{dz_0}\right)(\mathrm{z}_0 v_0 + \mathrm{y}_0 w_0) + \ldots;
\end{aligned}\right.$$

$$(e')\quad\left\{\begin{aligned}
r - r_0 &= -r_0 + (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{r_0}\Bigg[\mathrm{x}_0^2\frac{du_0}{dx_0} + \mathrm{y}_0^2\frac{dv_0}{dy_0} + \mathrm{z}_0^2\frac{dw_0}{dz_0}\\
&\qquad + \mathrm{y}_0\mathrm{z}_0\left(\frac{dv_0}{dz_0} + \frac{dw_0}{dy_0}\right) + \mathrm{z}_0\mathrm{x}_0\left(\frac{dw_0}{dx_0} + \frac{du_0}{dz_0}\right) + \mathrm{x}_0\mathrm{y}_0\left(\frac{du_0}{dy_0} + \frac{dv_0}{dx_0}\right)\Bigg]\\
&\quad + \frac{1}{2r_0^2}\Bigg[\left(\frac{du_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \frac{du_0}{dy_0}\mathrm{y}_0 + \frac{du_0}{dz_0}\mathrm{z}_0 + \ldots\right)^2\\
&\qquad + \left(\frac{dv_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \ldots\right)^2 + \left(\frac{dw_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \ldots\right)^2\Bigg]\\
&\quad + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1.2}\cdot\frac{4}{r_0^2}\left[\mathrm{x}_0^2\frac{du_0}{dx_0} + \mathrm{y}_0^2\frac{dv_0}{dy_0} + \ldots + \mathrm{x}_0\mathrm{y}_0\left(\frac{du_0}{dy_0} + \frac{dv_0}{dx_0}\right)\right]^2\\
&\quad + \frac{1}{2r_0}\left(\mathrm{x}_0^3\frac{d^2u_0}{dx_0^2} + \ldots\right);
\end{aligned}\right.$$

$$(f')\qquad \frac{d\dfrac{fr}{r}}{r\,dr} = \frac{d\dfrac{fr_0}{r_0}}{r_0\,dr_0} + (r - r_0)\frac{d\dfrac{d\frac{fr_0}{r_0}}{r_0\,dr_0}}{dr_0} + \ldots;$$

$$(g')\qquad \rho = \frac{\rho_0}{\left(1 + \dfrac{du_0}{dx_0}\right)\left(1 + \dfrac{dv_0}{dy_0}\right)\left(1 + \dfrac{dw_0}{dz_0}\right) - \dfrac{dv_0}{dz_0}\dfrac{dw_0}{dy_0} - \dfrac{dw_0}{dx_0}\dfrac{du_0}{dz_0} - \dfrac{du_0}{dy_0}\dfrac{dv_0}{dx_0} + \ldots}\ [^*].$$

[*] Le dénominateur de la valeur de ρ est, sauf des produits du troisième ordre, que l'on n'a point écrits, le déterminant donnant le volume du parallélépipède obliquangle dans lequel s'est changé un élément cubique, divisé par le volume de celui-ci.

Substituons dans (c'), effectuons les multiplications, et faisons passer hors des $\mathbf{S}$ les dérivées $\frac{d(u_0, v_0, w_0)}{d(x_0, y_0, z_0)}$ qui sont des quantités sensiblement constantes dans l'étendue imperceptible de la sphère des actions des molécules sur une masse qui serait concentrée au point $M(x_0, y_0, z_0)$. Nous supprimerons les carrés et les produits de ces dérivées très-petites, ce qui réduira (g') à

$$\rho = \rho_0 (1 - \partial_x^0 - \partial_y^0 - \partial_z^0).$$

Nous effacerons aussi toutes les sommes $\mathbf{S}$ dans lesquelles il entrerait comme facteurs plus de quatre des grandeurs imperceptibles x_0, y_0, z_0, ce qui nous permettra de supprimer, dans les valeurs (d') de x, y, z, les dérivées du second ordre de u_0, v_0, w_0, et, dans (f'), son terme en $r - r_0$. Ces termes, provenant de la mise en compte de dérivées d'ordre supérieur au premier, peuvent être utiles à conserver dans certaines questions élevées des théories de la lumière et de la chaleur [*]; mais une pareille approximation est superflue dans la question qui nous occupe.

Nous obtiendrons ainsi, en considérant qu'on a, d'après la définition des a^0 et l'expression (a'),

$$(h')\quad \mathrm{a}^0_{x^4} \text{ ou } \mathrm{a}^0_{y^2z^2} \text{ ou } \mathrm{a}^0_{y^3z} \text{ ou } \mathrm{a}^0_{x^2yz} = \frac{\rho_0}{2}\mathbf{S}\, m \frac{d\frac{fr_0}{r_0}}{r_0\, dr_0}(\mathrm{x}_0^4 \text{ ou } \mathrm{y}_0^2\mathrm{z}_0^2 \text{ ou } \mathrm{y}_0^3\mathrm{z}_0 \text{ ou } \mathrm{x}_0^2\mathrm{y}_0\mathrm{z}_0).$$

et, en faisant symboliquement

$$(i')\qquad \mathrm{a}^0_x\mathrm{a}^0_x\mathrm{a}^0_x\mathrm{a}^0_x = \mathrm{a}^0_{x^2}\mathrm{a}^0_{x^2} = \mathrm{a}^0_{x^4},\qquad \mathrm{a}^0_z\mathrm{a}^0_{xyz} = \mathrm{a}^0_{xyz^2}, \text{ et ainsi des autres.}$$

---

[*] On peut voir une Communication faite le 20 octobre 1855 à la Société philomathique (journal *l'Institut*, n° 1146, 19 décembre, p. 441), où l'on exprime que la dilatation des corps par le mouvement vibratoire qui constitue la chaleur n'est possible qu'autant que les termes où se trouve engagée la dérivée du second ordre, supposée négative, de l'action mutuelle des atomes par rapport à leur distance l'un de l'autre, ne sont point négligeables. (Il n'y a pas lieu de s'arrêter à l'alinéa de cette Communication commençant par les mots : Newton va même ..).

l'expression générale symbolique suivante, très-symétrique :

$$
(j')\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{a}_{x^4} \text{ ou } \mathrm{a}_{y^2z^2} \text{ ou } \mathrm{a}_{y^3z} \text{ ou } \mathrm{a}_{x^2yz} \\
&\quad = (\mathrm{a}^0_{x^4} \text{ ou } \mathrm{a}^0_{y^2z^2} \text{ ou } \mathrm{a}^0_{y^3z} \text{ ou } \mathrm{a}^0_{x^2yz})\left(1 - \frac{du_0}{dx_0} - \frac{dv_0}{dy_0} - \frac{dw_0}{dz_0}\right) \\
&\quad + \left(\mathrm{a}^0_x \frac{d}{dx_0} + \mathrm{a}^0_y \frac{d}{dy_0} + \mathrm{a}^0_z \frac{d}{dz_0}\right)
\left\{
\begin{aligned}
&4\,\mathrm{a}^0_{x^3} u_0 \\
\text{ou }\ & 2\,\mathrm{a}^0_{yz^2} v_0 + 2\,\mathrm{a}^0_{y^2z} w_0 \\
\text{ou }\ & 3\,\mathrm{a}^0_{y^2z} v_0 + \mathrm{a}^0_{y^3} w_0 \\
\text{ou }\ & 2\,\mathrm{a}^0_{xyz} u_0 + \mathrm{a}^0_{x^2z} v_0 + \mathrm{a}^0_{x^2y} w_0
\end{aligned}
\right\},
\end{aligned}
\right.
$$

où, après le développement, les caractéristiques d de différentiation doivent porter seulement sur les u_0, v_0, w_0; en sorte qu'elle produit les quatre suivantes :

$$
(k')\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{a}_{x^4} &= \mathrm{a}^0_{x^4}\left(1 - 3\frac{du_0}{dx_0} - \frac{dv_0}{dy_0} - \frac{dw_0}{dz_0}\right) + 4\left(\mathrm{a}^0_{x^3y}\frac{du_0}{dy_0} + \mathrm{a}^0_{x^3z}\frac{du_0}{dz_0}\right), \\
\mathrm{a}_{y^2z^2} &= \mathrm{a}^0_{y^2z^2}\left(1 - \frac{du_0}{dx_0} + \frac{dv_0}{dy_0} + \frac{dw_0}{dz_0}\right) \\
&\quad + 2\left(\mathrm{a}^0_{yz^3}\frac{dv_0}{dz_0} + \mathrm{a}^0_{xyz^2}\frac{dv_0}{dx_0} + \mathrm{a}^0_{xy^2z}\frac{dw_0}{dx_0} + \mathrm{a}^0_{y^3z}\frac{dw_0}{dy_0}\right), \\
\mathrm{a}_{y^3z} &= \mathrm{a}^0_{y^3z}\left(1 - \frac{du_0}{dx_0} + 2\frac{dv_0}{dy_0}\right) \\
&\quad + 3\left(\mathrm{a}^0_{y^2z^2}\frac{dv_0}{dz_0} + \mathrm{a}^0_{xy^2z}\frac{dv_0}{dx_0}\right) + \left(\mathrm{a}^0_{xy^3}\frac{dw_0}{dx_0} + \mathrm{a}^0_{y^4}\frac{dw_0}{dy_0}\right), \\
\mathrm{a}_{x^2yz} &= \mathrm{a}^0_{x^2yz}\left(1 + \frac{du_0}{dx_0}\right) + 2\left(\mathrm{a}^0_{xy^2z}\frac{du_0}{dy_0} + \mathrm{a}^0_{xyz^2}\frac{du_0}{dz_0}\right) \\
&\quad + \mathrm{a}^0_{x^3z}\frac{dv_0}{dx_0} + \mathrm{a}^0_{x^2z^2}\frac{dv_0}{dz_0} + \mathrm{a}^0_{x^3y}\frac{dw_0}{dx_0} + \mathrm{a}^0_{x^2y^2}\frac{dw_0}{dy_0}.
\end{aligned}
\right.
$$

Elle résout la question proposée, de détermination des coefficients $\mathrm{a}_{\ldots}$ relatifs à un état moléculaire donné du corps élastique, par ceux $\mathrm{a}^0_{\ldots}$ d'un état déterminé antérieur, et par les pressions en jeu dans ces deux états qu'elles constituaient, car les neuf dérivées en x_0, y_0, z_0 des déplacements u_0, v_0, w_0 qui ont eu lieu de l'un à l'autre sont déterminables analytiquement en fonction de ces pressions supposées connues, si la contexture élastique n'a pas été altérée en passant de

l'état antérieur à l'état subséquent, ou si les déplacements u_0, v_0, w_0 n'ont eu aucune partie permanente.

11. Mais cette formule (j') ou ses particularisations (k') résolvent une question plus étendue.

Elles donnent les coefficients $a_{....}$ en fonction de ceux $a^0_{....}$ et des neuf dérivées, si elles sont connues, des petits déplacements u_0, v_0, w_0, même dans le cas où la contexture du corps solide aurait été changée, en sorte qu'une partie des déformations opérées par les mêmes déplacements entre les deux états que ces coefficients d'élasticité caractérisent, soit devenue persistante.

Il suffit, en effet, pour l'établissement de la formule (j'), que les dérivées $\frac{d(u_0, v_0, w_0)}{d(x_0, y_0, z_0)}$ de ces déplacements, persistants ou non, aient été assez petites pour permettre la suppression de leurs carrés et produits.

Aussi cette formule (j') n'est-elle qu'une généralisation de celles (79) du Mémoire de 1863, qui étaient données pour l'évaluation des effets de trois compressions ou dilatations permanentes, et qui ont été obtenues précisément par le procédé dont on vient de faire usage [*].

12. Il convient d'observer que les coefficients d'élasticité $a_{....}$ ou $a^0_{....}$ d'un corps solide homogène ne dépendent pas seulement de l'état

---

[*] En effet, ces formules (79), réduites à leurs premiers termes, ou débarrassées de ceux dans lesquels les $a_{....}$ désignent des sommes **S** de produits de six facteurs très-petits, que nous venons de dire pouvoir être omises, reviennent, avec nos notations actuelles, à

$$a_{x^4} = \frac{\left(1+\frac{du_0}{dx_0}\right)^3}{\left(1+\frac{dv_0}{dy_0}\right)\left(1+\frac{dw_0}{dz_0}\right)} a^0_{x^4}, \qquad a_{y^2z^2} = \frac{\left(1+\frac{dv_0}{dy_0}\right)\left(1+\frac{dw_0}{dz_0}\right)}{1+\frac{du_0}{dx_0}} a^0_{y^2z^2}.$$

Or c'est à quoi se réduisent les deux premières expressions (k') quand les carrés des dérivées sont négligés et quand on suppose, comme en 1863, que le corps inégalement comprimé en trois sens était primitivement isotrope.

On peut voir aux *Essais sur la théorie mathématique de la lumière*, de M. Briot (1864), un calcul du même genre, avec mise en compte de termes du sixième degré en x, y, z, et de dérivées de fr comme celles qui affectent le deuxième terme de (f').

de ce corps ou du degré de rapprochement ou d'écartement de ses molécules en divers sens à chaque point. Ils dépendent aussi des directions des axes coordonnés des x, y, z dans son intérieur, ou de leur orientation par rapport à ses plans principaux ou lignes principales de contexture s'il n'est pas isotrope, ou s'il a cessé de l'être avant les derniers déplacements appelés u, v, w sans indices. Comme, au Mémoire de 1863, il a été donné sous le n° 35 une formule générale symbolique

$$(l')\qquad \begin{aligned} a_{nsx'y'} = {} & (a_x c_{nx} + a_y c_{ny} + a_z c_{nz})(a_x c_{sx} + a_y c_{sy} + a_z c_{sz}) \\ & \times (a_x c_{x'x} + a_y c_{x'y} + a_z c_{x'z})(a_x c_{y'x} + a_y c_{y'y} + a_z c_{y'z}), \end{aligned}$$

propre à déduire, des coefficients $a_{\ldots}$ relatifs à une orientation donnée, ceux qui le sont à toute autre dans un corps resté au même état, il est entendu que nous supposons, dans toutes nos formules, que les $a^{\circ}_{\ldots}$ et les $a_{\ldots}$ sont relatifs à des axes coordonnés rencontrant les mêmes molécules, à cela près des seuls écarts résultant des déplacements très-petits u_0, v_0, w_0.

On peut remarquer aussi que le très-léger changement d'orientation résultant inévitablement de ces petits écarts suffit pour expliquer et déterminer les divers termes des quatre formules de transformation (k'), *à l'exception du premier de chacune d'elles*, et cela, indépendamment des considérations de forces moléculaires qui nous ont servi à établir la formule (j'), dont elles dérivent.

En effet, lorsque les directions appelées n, s, x', y' dans la formule (l') sont prises parmi trois axes coordonnés nouveaux rectangulaires ou légèrement obliquangles, x', y', z' ne faisant que de très-petits angles avec x, y, z, en sorte qu'on puisse prendre $c_{xx'} = 1$, $c_{yy'} = 1$, $c_{zz'} = 1$, et négliger comme petits du second ordre les produits des six autres cosinus entre eux, la formule (l') donne

$$(m')\qquad \left\{ \begin{aligned} a_{x'^4} &= a_{x^4} + 4a_{x^3y} c_{x'y} + 4a_{x^3z} c_{x'z}, \\ a_{y'^2z'^2} &= a_{y^2z^2} + 2a_{yz^3} c_{y'z} + 2a_{xyz^2} c_{y'x} + 2a_{xy^2z} c_{z'x} + 2a_{y^3z} c_{z'y}, \\ a_{y'^3z'} &= a_{y^3z} + 3a_{y^2z^2} c_{y'z} + 3a_{xy^2z} c_{y'x} + a_{xy^3} c_{z'x} + a_{y^4} c_{z'y}, \\ a_{x'^2y'z'} &= a_{x^2yz} + 2a_{xy^2z} c_{x'y} + 2a_{xyz^2} c_{x'z} + a_{x^3y} c_{z'x} + a_{x^3z} c_{y'x} \\ & \quad + a_{x^2y^2} c_{z'y} + a_{x^2z^2} c_{y'z}. \end{aligned} \right.$$

Or, si nous remplaçons x, y, z par x_0, y_0, z_0, en supposant, comme

au n° 6 [expression (n)], que les directions x', y', z' sont normales aux trois plans légèrement obliquangles dans lesquels les déplacements u_0, v_0, w_0 ont changé les directions x_0, y_0, z_0, en sorte qu'on ait

$$(n')\quad \left\{\begin{array}{lll} \mathrm{c}_{x'y_0} = -\dfrac{du_0}{dy_0}, & \mathrm{c}_{x'z_0} = -\dfrac{du_0}{dz_0}, & \mathrm{c}_{y'z_0} = -\dfrac{dv_0}{dz_0}, \\ \mathrm{c}_{y'x_0} = -\dfrac{dv_0}{dx_0}, & \mathrm{c}_{z'x_0} = -\dfrac{dw_0}{dx_0}, & \mathrm{c}_{z'y_0} = -\dfrac{dw_0}{dy_0}, \end{array}\right.$$

et si nous substituons ces valeurs dans les équations (m'), en tirant celles des $\mathrm{a}_{x^1},\ldots$ qui forment les premiers termes des seconds membres, puis remplaçant, dans les termes affectés des $d(u_0, v_0, w_0)$, les a par des a^0 de mêmes indices, qui n'en peuvent différer que de quantités affectées elles-mêmes de ces neuf dérivées très-petites, nous obtenons, comme on voit, tous les termes des expressions (k') des $\mathrm{a}_{x^1},\ldots$, sauf le premier de chacune d'elles. Ces premiers termes se trouvent remplacés par les espèces de coefficients d'élasticité oblique formant les premiers membres des (m'), en sorte que ces termes ont seuls besoin, comme on voit, d'être déterminés par ces considérations d'action moléculaire dont je cherche à restreindre la mise en œuvre, tout en en soutenant la légitimité contre ceux qui refusent de les invoquer, ou, pour mieux dire, qui ne les invoquent qu'implicitement et à leur insu.

15. Composons maintenant les expressions des forces p en p^0 et $\dfrac{du_0}{dx_0},\ldots$. Substituons pour cela les expressions trouvées (j') ou (k') des coefficients a en a^0 dans les sextinômes (k) p^1_{xx} et p^1_{yz}, et ceux-ci dans les formules (i *bis*) de Cauchy. Appelons p^{01} des sextinômes composés en $\partial_x, \partial_y, \ldots, \mathrm{g}_{xy}$ avec les coefficients $\mathrm{a}^0_{\ldots}$, comme ceux (k) p^1 l'étaient avec les coefficients $\mathrm{a}_{\ldots}$, c'est-à-dire faisons, pour abréger,

$$(o')\quad \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{a}^0_{xx} \text{ ou } \mathrm{a}^0_{yz} \text{ ou } \ldots)(\mathrm{a}^0_{xx}\partial_x + \mathrm{a}^0_{yy}\partial_y + \mathrm{a}^0_{zz}\partial_z + \mathrm{a}^0_{yz}\mathrm{g}_{yz} + \mathrm{a}^0_{zx}\mathrm{g}_{zx} + \mathrm{a}^0_{xy}\mathrm{g}_{xy}) \\ \quad = p^{01}_{xx} \text{ ou } p^{01}_{yz} \text{ ou} \ldots; \end{array}\right.$$

et convenons d'étendre aux p^0 et p^{01}, et ci-après à ceux que nous appellerons p^{00}, la décomposition symbolique (i') des $\mathrm{a}_{\ldots}$.

Nous aurons, en négligeant les produits des dérivées $\dfrac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ entre

elles, mais non pas leurs produits par les dérivées supposées bien plus grandes $\frac{d(u_0, v_0, w_0)}{d(x_0, y_0, z_0)}$, la formule générale suivante, donnant, après de petits déplacements u, v, w, éprouvés à partir d'un état où il y avait déjà des pressions considérables données $p^o_{xx}, \ldots, p^o_{xy}$, les composantes des pressions finales, exprimées, comme on le désirait, en fonction des coefficients d'élasticité $a^o_{x^4}$, $a^o_{x^2yz}, \ldots$ mesurés pour un état constant du corps, et des dérivées de u, v, w en x, y, z, ainsi que de celles de u_0, v_0, w_0 en x_0, y_0, z_0,

$$(p') \left\{ \begin{aligned} p_{xx} \text{ ou } p_{yz} = {} & (p^o_{xx} \text{ ou } p^o_{yz})\left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right) + (p^{01}_{xx} \text{ ou } p^{01}_{yz})\left(1 - \frac{du_0}{dx_0} - \frac{dv_0}{dy_0} - \frac{dw_0}{dz_0}\right) \\ & + \left(p^o_x \frac{d}{dx} + p^o_y \frac{d}{dy} + p^o_z \frac{d}{dz}\right)(2p^o_x u \text{ ou } p^o_y w + p^o_z v) \\ & + \left(p^{01}_x \frac{d}{dx_0} + p^{01}_y \frac{d}{dy_0} + p^{01}_z \frac{d}{dz_0}\right)(2p^{01}_x u_0 \text{ ou } p^{01}_y w_0 + p^{01}_z v_0) \\ & + (a^o_{xx} \text{ ou } a^o_{yz})\left(a^o_x \frac{d}{dx_0} + a^o_y \frac{d}{dy_0} + a^o_z \frac{d}{dz_0}\right) \left\{ \begin{aligned} & (2a^o_x \partial_x + a^o_y g_{xy} + a^o_z g_{zx}) u_0 \\ & + (a^o_x g_{xy} + 2a^o_y \partial_y + a^o_z g_{yz}) v_0 \\ & + (a^o_x g_{zx} + a^o_y g_{yz} + 2a^o_z \partial_z) w_0 \end{aligned} \right\}; \end{aligned} \right.$$

les différentiations par rapport à x, y, z, indiquées dans la seconde ligne, portant sur les u, v, w, et les différentiations par rapport à x_0, y_0, z_0, indiquées ensuite, portant sur les u_0, v_0, w_0.

14. On peut, par une vérification curieuse, obtenir identiquement cette formule (p') des pressions p, en faisant usage d'un procédé tout différent et important à signaler, comme éclaircissant un point susceptible de causer quelque embarras.

Si, dans des expressions de $p^o_{xx}, \ldots, p^o_{yz}, \ldots$ en $a^o_{\ldots}$ et $\frac{d(u_0, v_0, w_0)}{d(x_0, y_0, z_0)}$, nous substituons à u_0, v_0, w_0, respectivement

$$u_0 + u, \quad v_0 + v, \quad w_0 + w,$$

nous devrons, évidemment, avoir les valeurs des pressions $p_{xx}, \ldots$, $p_{yz}, \ldots$, vu qu'elles répondent à ces déplacements totaux supposés toujours petits; et leurs expressions ainsi obtenues se trouveront affectées, ainsi que nous le désirons, des coefficients censés constants et connus

$a^{\circ}_{....}$ au lieu de ceux $a_{....}$ qui ne sont pas supposés avoir été mesurés d'avance comme ceux-ci, vu leur variabilité avec les données de chaque problème particulier.

Il semble, d'abord, que le résultat serait simplement $p^0_{xx} + p^1_{xx}$, $p^0_{yz} + p^1_{yz}$. Mais, dans le fait, on n'obtient des expressions complètes de $p_{xx}, \ldots, p_{yz}, \ldots$ qu'en construisant d'abord des expressions de $p^0_{xx}, \ldots$, $p^0_{yz}, \ldots$, où les carrés et produits deux à deux des neuf dérivées de u_0, v_0, w_0 soient conservés. Nous y parviendrons, toujours à la manière de Cauchy, en mettant, dans les expressions non encore transformées [telles que (c')]

$$(q') \qquad p^0_{xx} \quad \text{ou} \quad p^0_{yz} \quad \text{ou}\ldots = \frac{\rho}{2}\,\mathrm{S}m\frac{fr}{r}(\mathrm{x}^2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{yz} \quad \text{ou}\ldots):$$

1° A la place de x, y, z, x^4, $\mathrm{y}^2\mathrm{z}^2$, leurs valeurs (d') du n° **10**, toutefois sans les termes affectés des dérivées du second ordre, qui donneraient des produits de plus de quatre des grandeurs imperceptibles x_0, y_0, z_0;

2° A la place de $\frac{fr}{r}$, $\frac{fr_0}{r_0} + (r - r_0)\frac{d\frac{fr_0}{r_0}}{dr_0}$ en ne poussant pas plus loin le développement par la même raison;

3° A la place de $r - r_0$, les quatre premières lignes de son expression (e'), car la cinquième et la sixième ne fournissent que de ces produits du sixième et du cinquième degré que nous effaçons [*];

4° A la place de ρ, son expression (g') en divisant le numérateur par le dénominateur et en conservant les carrés et produits deux à deux des $\frac{d(u_0\, v_0\, w_0)}{d(x^0\, y_0\, z_0)}$.

---

[*] Dans un premier calcul, j'avais tenu compte de ce qui vient de ces deux dernières lignes, et, en même temps, du terme en $\frac{(r - r_0)^2}{1.2}$ du développement de $\frac{fr}{r}$. Leurs résultats réunis se sont trouvés encore identiquement conformes à ce que donne l'analyse du n° 10 en conservant le terme en $r - r_0$ de l'expression (f') de $\frac{d\frac{fr}{r}}{rdr}$, qui ajoute, à celles (h') des divers $a_{....}$, des polynômes à vingt et un termes du second degré en ∂^0, g^0, affectés de trente-cinq coefficients nouveaux $\frac{\rho_0}{2}\,\mathrm{S}m\ldots$ du sixième degré en x_0, y_0, z_0.

Alors, en remplaçant, conformément aux expressions (b) du n° 1,

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{du_0}{dx_0}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du_0}{dx_0}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dv_0}{dx_0}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dw_0}{dx_0}\right)^2 & \text{par} & \partial_x^0+\dfrac{1}{2}(\partial_x^0)^2 \\ \dfrac{dv_0}{dz_0}+\dfrac{dw_0}{dy_0}+\dfrac{du_0}{dy_0}\dfrac{du_0}{dz_0}+\dfrac{dv_0}{dy_0}\dfrac{dv_0}{dz_0}+\dfrac{dw_0}{dy_0}\dfrac{dw_0}{dz_0} & \text{par} & g_{yz}^0(1+\partial_y^0+\partial_z^0) \end{array}\right\} \text{et ainsi des autres,}$$

enfin, en faisant

$$\frac{\rho_0}{2}\mathrm{S}\, m\frac{fr_0}{r_0}(\mathrm{x}_0^4 \quad \text{ou} \quad \mathrm{y}_0^2\,\mathrm{z}_0^2 \quad \text{ou}\ldots) = p_{xx}^{00} \quad \text{ou} \quad p_{yz}^{00} \quad \text{ou}\ldots,$$

c'est-à-dire en appelant p^{00} les six composantes de pressions dans l'*état antérieur* ou qui a précédé les premiers déplacements u_0, v_0, w_0 des points, nous obtiendrons l'expression suivante, où le $(p_x^{00}+\ldots)^2$ du premier terme est symbolique quant aux p^{00} comme les autres le sont quant aux a^0, et n'acquiert de signification qu'après effectuation :

$$(r')\left\{\begin{array}{l} p_{xx}^0 = \left(p_x^{00}+p_x^{00}\dfrac{du_0}{dx_0}+p_y^{00}\dfrac{du_0}{dy_0}+p_z^{00}\dfrac{du_0}{dz_0}\right)^2\left(1-\dfrac{du_0}{dx_0}-\dfrac{dv_0}{dy_0}-\dfrac{dw_0}{dz_0}+\text{termes du 2}^{\text{e}}\text{ degré}\right) \\ \quad +\left\{\begin{array}{c} \mathrm{a}_{xx}^0\partial_x^0+\mathrm{a}_{yy}^0\partial_y^0+\mathrm{a}_{zz}^0\partial_z^0 \\ +\mathrm{a}_{yz}^0 g_{yz}^0+\mathrm{a}_{zx}^0 g_{zx}^0+\mathrm{a}_{xy}^0 g_{xy}^0 \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \mathrm{a}_{xx}^0\left(1-\dfrac{du_0}{dx_0}-\dfrac{dv_0}{dy_0}-\dfrac{dw_0}{dz_0}\right) \\ +2\,\mathrm{a}_{xx}^0\dfrac{du_0}{dx_0}+2\,\mathrm{a}_{xy}^0\dfrac{du_0}{dy_0}+2\,\mathrm{a}_{xz}^0\dfrac{du_0}{dz_0} \end{array}\right\} \\ \quad +\dfrac{1}{2}\mathrm{a}_{xx}^0\left\{\begin{array}{c} \mathrm{a}_{xx}^0\partial_x^{0^2}+\mathrm{a}_{yy}^0\partial_y^{0^2}+\mathrm{a}_{zz}^0\partial_z^{0^2} \\ +2\,\mathrm{a}_{yz}^0 g_{yz}^0(\partial_y^0+\partial_z^0)+2\,\mathrm{a}_{zx}^0 g_{zx}^0(\partial_z^0+\partial_x^0)+2\,\mathrm{a}_{xy}^0 g_{xy}^0(\partial_x^0+\partial_y^0) \end{array}\right\}, \end{array}\right.$$

expression qui, avec un zéro de moins à chaque lettre, donne p_{xx} avec mise en compte des termes du second degré en u, v, w, ∂, g et qui alors se réduit à celle (i) de Cauchy en effaçant ces termes.

Maintenant, à la place de u_0, v_0, w_0, mettons comme nous avons dit

$$u_0+u, \quad v_0+v, \quad w_0+w,$$

et, cette substitution étant faite, changeons de variable indépendante, comme me l'a indiqué M. Boussinesq [*]; c'est-à-dire, après

[*] Sa *Note complémentaire* du 5 septembre citée au n° 7 a été l'occasion du présent travail. C'est aussi ce jeune géomètre qui a appelé mon attention sur la nécessité de tenir compte des termes du second degré en $d(u_0+u,\ v_0+v,\ w_0+w)$, comme pouvant fournir des produits non négligeables des $d(u_0,\ v_0,\ w_0)$ par les $d(u,\ v,\ w)$.

avoir mis

$$\frac{du_0}{dx_0}+\frac{du}{dx_0},\quad \frac{du_0}{dy_0}+\frac{du}{dy_0},\ldots \quad \text{à la place de} \quad \frac{du_0}{dx_0},\quad \frac{du_0}{dy_0},\ldots:$$

changeons les seconds termes $\frac{du}{dx_0}$, $\frac{du}{dy_0}$ de ces binômes en

$$\frac{du}{dx}\frac{dx}{dx_0}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx_0}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx_0},\quad \frac{du}{dx}\frac{dx}{dy_0}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dy_0}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy_0};$$

ou, eu égard à ce que

$$x=x_0+u_0,\quad y=y_0+v_0,\quad z=z_0+w_0,$$

changeons-les en

$$\frac{du}{dx}\left(1+\frac{du_0}{dx_0}\right)+\frac{du}{dy}\frac{dv_0}{dx_0}+\frac{du}{dz}\frac{dw_0}{dx_0},\quad \frac{du}{dx}\frac{du_0}{dy_0}+\frac{du}{dy}\left(1+\frac{dv_0}{dy_0}\right)+\frac{du}{dz}\frac{dw_0}{dy_0}.$$

Cela reviendra à remplacer, dans l'expression (r') de p^0_{xx}, pour qu'elle devienne la valeur de p_{xx},

$$(s')\qquad \begin{cases} \dfrac{du_0}{dx_0} \quad \text{par} \quad \dfrac{du_0}{dx_0}+\dfrac{du}{dx}+\dfrac{du_0}{dx_0}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv_0}{dx_0}\dfrac{du}{dy}+\dfrac{dw_0}{dx_0}\dfrac{du}{dz}, \\ \dfrac{du_0}{dy_0} \quad \text{par} \quad \dfrac{du_0}{dy_0}+\dfrac{du}{dy}+\dfrac{du_0}{dy_0}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv_0}{dy_0}\dfrac{du}{dy}+\dfrac{dw_0}{dy_0}\dfrac{du}{dz},\ldots, \end{cases}$$

et, par conséquent, en négligeant les produits des $\frac{d(u,\,v,\,w)}{d(x,\,y,\,z)}$ les uns par les autres, ainsi que *par des produits mutuels* des $\frac{d(u_0,\,v_0,\,w_0)}{d(x_0,\,y_0,\,z_0)}$,

$$\text{à remplacer} \quad \frac{du_0}{dx_0}\frac{du_0}{dy_0} \quad \text{par} \quad \frac{du_0}{dx_0}\frac{du_0}{dy_0}+\frac{du_0}{dx_0}\frac{du}{dy}+\frac{du_0}{dy_0}\frac{du}{dx}, \quad \text{et ainsi des autres.}$$

Nous obtiendrons ainsi pour p_{xx} une expression dans laquelle on pourra écrire simplement p^0_{xx} à la place de p^{00}_{xx} suivi de tout ce qui n'est affecté que des u_0, v_0, w_0 sans les u, v, w. Or nous trouverons, grâce à ces transformations, en ordonnant par rapport aux a^0_{xx}, $a^0_{xy,z},\ldots$ et en négligeant, vu la faiblesse comparative supposée de p^{00}_{xx}, ses produits par un ∂^0 et par un ∂ à la fois, nous obtiendrons, dis-je, pré-

cisément ce que donne l'expression (p') déjà trouvée de p_{xx} lorsqu'on la développe et qu'on remplace

$$p^{\circ}_{xx} \quad \text{par} \quad p^{\circ\circ}_{xx}\left(1-\frac{du_0}{dx_0}-\frac{dv_0}{dy_0}-\frac{dw_0}{dz_0}\right)+2\left(p^{\circ\circ}_{xx}\frac{du_0}{dx_0}+p^{\circ\circ}_{xx}\frac{du_0}{dy_0}+p^{\circ\circ}_{zz}\frac{du_0}{dz_0}\right)$$
$$+\,\mathrm{a}^{\circ}_{xx}(\mathrm{a}^{\circ}_{xx}\partial^{\circ}_{x}+\mathrm{a}^{\circ}_{yy}\partial^{\circ}_{y}+\ldots+\mathrm{a}^{\circ}_{xy}\,\mathrm{g}^{\circ}_{xy}),$$

et ainsi des autres, conformément aux formules (i *bis*), ou à celle (r') réduite aux termes du premier degré.

15. La formule (p') de la pression normale p_{xx} se simplifie et devient capable *immédiatement* d'être exprimée en $p^0 - p^{00}$, ∂, g seuls avec les a^0, lorsque le corps auquel on l'applique avait primitivement trois plans rectangulaires de symétrie de contexture et qu'il n'a été pressé ou tiré que parallèlement à leurs intersections. Alors, en prenant celles-ci pour axes des coordonnés, les dérivées de u_0, v_0, w_0 et celles de u, v, w se réduisent aux dilatations ∂^0, ∂, et les p^{00}, p^0, p aux seules composantes normales. On a, par exemple,

$$(t') \quad p_{xx}=p^{\circ}_{xx}+p^{\circ}_{xx}(\partial_x-\partial_y-\partial_z)+(\mathrm{a}^{\circ}_{x^4}\partial^{\circ}_x+\mathrm{a}^{\circ}_{x^2y^2}\partial^{\circ}_y+\mathrm{a}^{\circ}_{x^2z^2}\partial^{\circ}_z)(1+\partial_x-\partial_y-\partial_z).$$

Alors aussi on a, en négligeant (pour plus de simplicité seulement) les produits des pressions p^{00}, faibles vis-à-vis des p^0, par les ∂^0,

$$p^{\circ}_{xx}-p^{\circ\circ}_{xx}=\mathrm{a}^{\circ}_{x^4}\partial^{\circ}_x+\mathrm{a}^{\circ}_{x^2y^2}\partial^{\circ}_y+\mathrm{a}^{\circ}_{x^2z^2}\partial^{\circ}_z,$$
$$p^{\circ}_{yy}-p^{\circ\circ}_{yy}=\mathrm{a}^{\circ}_{x^2y^2}\partial^{\circ}_x+\mathrm{a}^{\circ}_{y^4}\partial^{\circ}_y+\mathrm{a}^{\circ}_{y^2z^2}\partial^{\circ}_z,$$
$$p^{\circ}_{zz}-p^{\circ\circ}_{zz}=\mathrm{a}^{\circ}_{x^2z^2}\partial^{\circ}_x+\mathrm{a}^{\circ}_{y^2z^2}\partial^{\circ}_y+\mathrm{a}^{\circ}_{z^4}\partial^{\circ}_z;$$

d'où l'on peut tirer ∂°_x, ∂°_y, ∂°_z pour les substituer dans l'expression (t') de p_{xx}, dont on aura ainsi immédiatement la valeur en fonction seulement des pressions primitives données, des dilatations ∂_x, ∂_y, ∂_z éprouvées depuis l'état où elles étaient p^0, ainsi que des six coefficients d'élasticité a^0 supposés connus et mesurés dans l'état p^{00} (coefficients qui seront ordinairement exprimables par trois constantes seulement [*]).

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XIII, juillet 1868, p. 252. Note intitulée : *Formules de l'élasticité des corps amorphes.*

Elle se réduit, quand il y avait *isotropie*, en faisant

$$\mathrm{a}^{\circ}_{y^2z^2} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{a}^{\circ}_{x^4} = \mathrm{e},$$

et en effaçant les p^{00} supposés réduits à la pression de l'atmosphère, etc., dont la défalcation est censée faite d'avance, à

$$(u')\quad \left\{ \begin{aligned} p_{xx} &= p^{\circ}_{xx} + \mathrm{e}(3\partial_x + \partial_y + \partial_z) \\ &\qquad + p^{\circ}_{xx}\frac{26\partial_x - 3\partial_y - 3\partial_z}{5} - p^{\circ}_{yy}\frac{9\partial_x - 2\partial_y + 3\partial_z}{5} - p^{\circ}_{zz}\frac{9\partial_x + 3\partial_y - 2\partial_z}{5}, \end{aligned} \right.$$

formule qui donne, si l'on a

$$p^{\circ}_{yy} = 0, \quad p^{\circ}_{zz} = 0, \quad \text{avec} \quad \partial_y = \partial_z = -\tfrac{1}{4}\partial_x,$$

comme pour un prisme qui n'éprouve aucune pression latérale :

$$(v') \qquad \frac{p_{xx}}{\partial_x} = \tfrac{5}{2}\mathrm{e} + \tfrac{11}{2}p^{\circ}_{xx}.$$

Cette expression montre ce qu'une forte pression ou traction longitudinale antérieure p°_{xx} peut ajouter à ce qu'on appelle le module d'élasticité de traction ou de flexion des prismes, dans les limites toutefois de la stabilité de la contexture élastique.

16. Résumons ce qui précède, et qui est entièrement relatif aux formules complètes des pressions ou forces élastiques s'exerçant dans un corps solide à la suite de petites déformations subies, ou de petits déplacements des points, lorsqu'il y avait en jeu, à l'intérieur du corps, des forces considérables du même genre avant ces déplacements ou déformations.

On a vu, dans la première partie (nos **3**, **4**), que ces formules complètes de pressions, établies par Cauchy, en 1829, en calculant directement les augmentations que les déplacements des points apportaient aux résultantes des actions mutuelles des molécules à travers trois petites faces perpendiculaires aux coordonnées, pouvaient aussi être déduites, et de deux manières (no **4** et fin du no **7**), de l'expression du potentiel intérieur ou de l'*énergie latente* de l'élasticité du corps,

mais moyennant qu'on établît préalablement aussi cette expression-là par un calcul d'actions moléculaires, qui, seul, peut fournir la valeur complète du potentiel en fonction des pressions primitives, des dérivées des déplacements, et des quinze coefficients mesurant l'élasticité du corps dans diverses directions. De sorte qu'il faut renoncer à calculer le potentiel élastique en ne partant que du fait généralement admis de la forme linéaire des six composantes des pressions, et à contenter ainsi les adversaires de la loi moléculaire ou de son invocation explicite. Il est nécessaire, dans ce calcul du potentiel, de tenir un compte complet (n° 3) des quantités très-petites du second ordre, pour avoir d'une manière exacte les valeurs des composantes de pression jusqu'aux quantités du premier ordre, quoique l'on arrive au même résultat, quant à ces composantes, lorsqu'on fait simultanément, sur les termes du second ordre, deux omissions qui se compensent, et qu'il convient néanmoins d'apercevoir et d'éviter. On a vu aussi (n^{os} 7 et 8) que le potentiel peut être exprimé par une formule posée *à priori* comme fonction complète du second degré des dilatations et glissements, et dont la partie affectée de leurs premières puissances a pour coefficients les six composantes des pressions primitives; mais que les formules de pressions ultérieures qu'on en peut tirer des deux mêmes manières sont d'une autre forme, parce que neuf de leurs coefficients sont ceux d'élasticité des formules Cauchy, augmentés des composantes primitives, ce qui les fait varier davantage avec celles-ci.

Dans la deuxième partie (n^{os} 9 à 15), on a vu que les coefficients d'élasticité dont on a parlé, et qui restent à peu près constants quand les pressions primitives sont d'une grandeur de même ordre que ce que les déplacements u, v, w y ajoutent, peuvent (n° 9) varier très-sensiblement avec ces pressions lorsqu'elles sont considérables; mais que l'on peut établir des formules donnant les valeurs de ces coefficients variables, en fonction de coefficients constants, mesurés d'avance pour un état déterminé du corps, tel que son état le plus habituel, et des pressions antérieures relatives à cet état, ou de quantités déterminables analytiquement au moyen de la connaissance supposée de leurs intensités.

Ces quantités sont les neuf dérivées, par rapport aux coordonnées

primitives (x_0, y_0, z_0) des déplacements (u_0, v_0, w_0), supposés non permanents, qui feraient passer le corps de l'état déterminé et constant dont on a parlé, à l'état qui précède les déplacements nouveaux (u, v, w) produisant les pressions finales dont on désire avoir les six composantes (p_{xx},...).

On a vu également (n° 11) que les formules donnant les coefficients d'élasticité du corps (les a....), pour un certain état, en fonction des coefficients constants et supposés connus (les a°....), relatifs à un autre état, et des dérivées des déplacements (u_0, v_0, w_0) subis d'un état à l'autre, étaient également applicables quand ces déplacements ont amené des déformations en partie persistantes, pourvu qu'elles soient petites, mais qu'alors les dérivées de ces déplacements avaient besoin d'être connues indépendamment des pressions (p^{00} et p^0) relatives à ces deux états, vu qu'on ne peut alors les en déduire. Au reste, ces formules de détermination des coefficients d'élasticité inconnus par d'autres que l'on connaît, ont (n° 12), ainsi que les formules complètes des composantes de pressions (n° 6), leurs divers termes déterminables par la seule considération du petit changement de situation ou d'orientation que les déplacements ont fait éprouver aux trois lignes matérielles primitivement parallèles aux coordonnées, en sorte qu'il n'y a plus à déterminer que le premier terme de chacune de ces formules par des considérations moléculaires simples auxquelles on ne peut refuser d'acquiescer.

On a enfin (n° 15) présenté, comme application, un cas particulier où les valeurs des coefficients d'élasticité variables, et, par suite, des pressions définitives, peuvent être immédiatement exprimées ainsi d'une manière simple.

Cette étude et cette discussion étaient nécessaires pour pouvoir compléter ce qui regarde les formules fondamentales de la théorie de l'élasticité des corps solides.

Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état;

Par M. DE SAINT-VENANT.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, p. 473, 7 mars 1870.)

1. L'attention a été appelée d'une manière particulière sur ces sortes de mouvements, comprenant le pétrissage, le laminage, l'emboutissage, etc., par les expériences de M. Tresca, décrites dans des Mémoires (1864 à 1870) que l'Académie a approuvés [*]. On a dû naturellement se demander quelles lois pouvaient suivre les déplacements relatifs des points des corps ainsi déformés, sans disjonction, d'une manière permanente, et quelles forces intérieures s'y trouvaient en jeu.

Déjà Cauchy s'était occupé, en passant, d'un pareil sujet, car il proposait en 1828, pour le mouvement des corps mous ou dénués d'élasticité, des formules de pression intérieure, et des équations différentielles où se trouvaient engagées les dérivées des vitesses de leurs molécules [**]. Mais comme les composantes de pression, dans un sens tangentiel aux faces, n'y sont affectées que des vitesses du glissement relatif des couches que celles-ci séparent, ces formules supposent tacitement que la matière est en même temps dénuée *de cohésion,* et ne conviennent ainsi qu'aux liquides, même sans viscosité, comme les

[*] Mémoires des 7 novembre 1864, 22 avril et 3 juin 1867, sur l'écoulement des corps solides; et 29 mai 1869, 3 janvier 1870, sur le poinçonnage. Leur impression aux *Savants étrangers* a été votée les 12 juin 1865, 10 février 1868, 14 et 21 février 1870.

[**] *Exercices de Mathématiques*, 3e année, p. 183.

formules toutes pareilles dressées pour ces derniers corps par Poisson vers le même temps, et par Navier dès 1822.

Aussi, dans un Rapport fait le 29 juin 1868, sur deux Communications théoriques de M. Tresca, qui, alors, essayait d'interpréter les faits de déformation des solides par les formules ordinaires et plus anciennes des fluides [*], la Commission signalait la nécessité, si l'on voulait un jour se servir de formules plus complètes, telles que celles de Cauchy et Navier, d'ajouter aux expressions des composantes tangentielles *une partie considérable ne dépendant pas des vitesses, qui sont d'ailleurs ordinairement faibles* dans les mouvements ou écoulements dont il était question [**].

Soit que cette simple remarque ait pu suggérer à M. Tresca de substituer un principe dynamique nouveau à celui dont il avait hasardé l'emploi, soit, ce qui est aussi probable, que l'idée lui en ait été fournie entièrement par ses propres réflexions et ses nombreuses observations, ce savant auteur a terminé son remarquable Mémoire de 1869 sur le poinçonnage [***] par une *Théorie mécanique de la déformation des solides,* paraissant très-rationnelle, où il propose d'une manière nette (cette déformation étant censée s'opérer avec des vitesses infiniment petites) de regarder *comme constantes,* ou indépendantes des dilatations, compressions et glissements déjà opérés, les intensités des forces qui continuent d'en produire, lorsque la matière solide est parvenue à cet état qu'il compare à la *fluidité* parce que l'élasticité y a disparu ou ne produit plus que des réactions relativement négligeables. Et il a, en comparant le travail des fortes pressions extérieurement exercées pour déformer les solides mis en expérience avec celui des forces intérieures supposées réagir suivant cette loi fort simple, confirmé d'une manière variée son hypothèse, en déterminant pour chaque matière les intensités constantes à attribuer ainsi à ces dernières forces, par unité superficielle des faces où elles agissent.

Ces intensités, comme il l'a reconnu expérimentalement, sont d'égales grandeurs pour les résistances au cisaillement qui agissent dans la di-

---

[*] *Comptes rendus,* 25 mai et 22 juin 1868.

[**] *Comptes rendus,* 29 juin; t. LXVI, p. 1308.

[***] Présenté le 24 mai 1869, *Comptes rendus,* t. LXVIII, p. 1197.

rection du glissement maximum en chaque point, et pour les résistances, soit à la compression, soit à l'extension, exercées sur les faces où il n'y a pas de glissement; égalité que vérifie facilement un raisonnement *à priori* fondé sur la remarque, que quand la densité ne change pas, toute compression ou dilatation dans un sens est nécessairement accompagnée de glissements en des sens obliques sur celui-ci, et réciproquement [*].

2. Pour déterminer les mouvements que prennent les divers points des masses ductiles ainsi déformées, il n'a été fait encore que des tentatives de *pure cinématique*, fondées à la fois sur le fait de la conservation des volumes et des densités, et sur diverses hypothèses. Celles de M. Tresca consistent à diviser le bloc dont on produit l'*écoulement* ou le *poinçonnage* en plusieurs parties (cylindre central, cylindre annulaire latéral ou enveloppe, et *jet* plein ou annulaire), et à supposer que, dans chacune, toute ligne matérielle verticale reste verticale et toute ligne horizontale reste horizontale, sauf à s'incliner et à se courber en passant d'une partie dans la suivante, après s'être brisée ou brusquement infléchie au passage. J'y ai substitué une hypothèse beaucoup plus large, qui dispense de ces divisions mentales et qui n'entraîne pas de pareilles discontinuités : elle consiste à supposer que les composantes des vitesses suivant les coordonnées sont les trois dérivées d'une même fonction par rapport à chacune, multipliées respectivement par trois constantes dont on peut faire varier à volonté, et jusqu'à l'infini, les deux rapports mutuels; et on pourrait l'appliquer facilement aux poinçonnages, comme je l'ai fait aux *écoulements* [**].

3. Mais le problème est plus que cinématique; il est mécanique, et on ne peut espérer en donner une solution vraie qu'autant qu'on aura des équations où figurent les forces agissantes, et qui soient propres à cette hydrodynamique de nouvelle espèce. Il s'agit de savoir comment on y fera entrer ces actions intérieures d'*intensité restant con-*

---

[*] Note au *Compte rendu*, 14 fevrier 1870; t. LXX, p. 309.

[**] Surtout à la Note des 1er et 8 février 1869, t. LXVIII, p. 221 et 290.

stante, dont l'existence est ainsi démontrée par un raisonnement simple, appuyé de nombreuses expériences; forces pouvant être ramenées, d'après ce qu'on vient de dire, à la seule *résistance au glissement*.

Rappelons d'abord que pour les liquides, quand on peut négliger leur frottement, qui est une autre espèce de résistance au glissement, nulle au repos, mais que des vitesses d'une certaine grandeur engendrent, si, pour un point quelconque *d'espace*, dont les coordonnées sont x, y, z, l'on appelle u, v, w les composantes, suivant leurs directions, de la vitesse du point matériel qui y passe à l'époque désignée par le temps t, et si X, Y, Z sont les composantes, dans les mêmes directions, de la force animant l'unité de volume, l'on a, ρ représentant la densité constante, et p la pression supposée égale en tous sens autour de chaque point, les quatre équations différentielles connues

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \rho\left(X - \dfrac{du}{dt} - u\dfrac{du}{dx} - v\dfrac{du}{dy} - w\dfrac{du}{dz}\right), \\ \dfrac{dp}{dy} = \rho\left(Y - \dfrac{dv}{dt} - u\dfrac{dv}{dx} - \ldots\right), \\ \dfrac{dp}{dz} = \rho\left(Z - \dfrac{dw}{dt} - \ldots\right); \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0;$$

qui fourniraient pour toute époque, si l'on savait les intégrer pour les conditions particulières tant initiales qu'aux limites, les grandeurs des quatre inconnues u, v, w, p, en tous les points d'une masse liquide; par exemple de celle qui serait (comme les masses solides mises en expérience par M. Tresca) poussée hors d'un vase cylindrique, soit en bas par un piston de même diamètre, soit en haut et annulairement par un *poinçon* de diamètre un peu moindre.

Dans les équations que nous avons à établir pour la déformation des solides avec des vitesses en quelque sorte infiniment petites, ces vitesses u, v, w devront-elles entrer aussi? Cela n'est point douteux; car si, d'une part, vu leur petitesse, elles ne produisent généralement, d'une manière sensible, ni l'espèce de résistance au glissement dont on vient de parler pour les fluides, ni la résistance d'inertie que représentent les termes en u, v, w des seconds membres de (1), il faut, d'une autre part, considérer que les vitesses des divers points maté-

riels des corps ductiles constituent les déplacements qu'ils subissent pendant chaque instant : or c'est de ces déplacements que dépendent successivement les extensions, contractions et glissements relatifs intérieurs mettant en jeu les résistances à la continuation de la déformation, et déterminant leurs directions ainsi que les rapports de leurs intensités aux divers endroits. Les vitesses u, v, w entreront donc nécessairement, non-seulement dans l'équation (2) de conservation des volumes, mais encore dans celles que nous avons à établir pour exprimer la loi des résistances intérieures. Nous les conserverons aussi, au moins provisoirement, dans les seconds membres des équations d'équilibre telles que (1), à poser entre les pressions et les forces tant motrices que d'inertie qui agissent sur un élément parallélépipède; équations où nous ajouterons même, au besoin, comme on verra au n° 6, d'autres termes où les vitesses entrent.

Seulement, dans ces trois équations d'équilibre ayant les mêmes seconds membres que (1), avec un signe contraire [*], les premiers membres, comme pour tout corps solide ou fluide dans lequel les pressions ou tensions ne sont pas uniquement normales et égales en tous sens, doivent être trois trinômes

$$(3)\quad \frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{yx}}{dy}+\frac{dp_{zx}}{dz},\quad \frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{zy}}{dz},\quad \frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz},$$

où les p avec deux sous-lettres, les unes pareilles, les autres différentes, désignent respectivement, suivant une notation de Coriolis, les composantes normales et les composantes tangentielles des pressions ou tensions sur l'unité de trois petites faces rectangulaires, dont les premières sous-lettres désignent la coordonnée normale, tandis que les secondes indiquent les sens de décomposition.

4. Maintenant, pour caractériser l'état particulier des solides dont il est question, et pour rendre le nombre des équations égal à celui des inconnues, bornons-nous ici au cas le plus simple, où l'on n'a besoin de considérer que deux coordonnées x, z en abstrayant y. Ce

[*] Ce changement de signe vient de ce que les forces intérieures des solides, appelées ordinairement *pressions* par Poisson et Cauchy, sont plus proprement des tensions ou tractions.

cas serait celui de l'*écoulement*, hors d'un vase rectangulaire, d'un solide ductile par un orifice inférieur aussi rectangulaire, ayant une même longueur égale à l'unité et qu'on peut abstraire, ou du *poinçonnage* d'un bloc parallélépipède rectangle par un outil de même forme, à côtés parallèles aux siens, et de même longueur dans le sens de y qu'on abstrait.

Alors la deuxième des équations (1) n'existe pas, et les premiers membres (3) à donner aux deux autres se réduisent à des binômes, car les dérivées par rapport à y sont zéro ainsi que tous les termes où v entre.

Or il s'agit d'exprimer :

1° Que sur la face, perpendiculaire au plan xz, mais généralement oblique aux x et aux z, où la composante tangentielle de pression est la plus grande, elle a pour intensité celle de cette résistance constante au glissement maximum ou au cisaillement, qui a été appelée

$$K$$

par M. Tresca, et dont il a mesuré les valeurs pour les diverses matières;

2° Que cette face, où la résistance au glissement est la plus grande, est aussi celle sur laquelle la vitesse de glissement relatif est un maximum.

Appelons, pour poser cette double expression, x', z' deux axes faisant l'angle α avec x, z. On aura, en vertu de l'équilibre du tétraèdre élémentaire de Cauchy, remplacé ici par un prisme triangulaire ayant ses faces perpendiculaires aux x, z, x'; on aura, dis-je, pour la composante, suivant z', de la pression sur la face perpendiculaire à x',

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} p_{x'z'} &= -p_{xx}\sin\alpha\cos\alpha + p_{zz}\sin\alpha\cos\alpha + p_{zx}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ &= \frac{p_{zz}-p_{xx}}{2}\sin 2\alpha + p_{zx}\cos 2\alpha. \end{aligned} \right.$$

» Maintenant : 1° Son maximum a lieu pour

$$(5)\qquad \tan 2\alpha = \frac{p_{zz}-p_{xx}}{2p_{zx}},$$

et a pour intensité

$$\frac{1}{2}\sqrt{4p_{zx}^2 + (p_{zz}-p_{xx})^2}.$$

Égalant cette expression à la quantité connue K, l'on a

$$(6) \qquad p_{zx}^2 + \left(\frac{p_{zz} - p_{xx}}{2}\right)^2 = K^2 \text{ [*]}$$

pour la quatrième équation entre les inconnues du problème.

2° Les vitesses de dilatation, par unité de longueur, dans les sens respectifs x, z sont

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dw}{dz};$$

et la vitesse de glissement sur la face normale à x', dans la direction z', a pour valeur, u' et w' étant les composantes de la vitesse suivant x', z',

$$\frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'};$$

c'est-à-dire qu'un petit carré matériel, ayant ses côtés parallèles aux x', aux z', aura, au bout du temps dt, deux angles aigus dont le cosinus est le produit de ce binôme par dt, ou que ses côtés opposés auront glissé l'un devant l'autre d'une quantité qui, rapportée à l'unité de leur distance, se trouve mesurée par ce même produit. Et l'on trouve facilement

$$(7) \qquad \frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'} = \left(\frac{dw}{dz} - \frac{du}{dx}\right)\sin 2\alpha + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\cos 2\alpha,$$

dont le maximum a lieu pour

$$(8) \qquad \tang 2\alpha = \frac{\dfrac{dw}{dz} - \dfrac{du}{dx}}{\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}}.$$

Égalant cette expression à celle (5), afin d'obtenir la coïncidence des directions de plus grand glissement et de plus grande résistance au glissement, l'on a la cinquième équation du problème.

On obtiendrait évidemment cette équation toute pareille, en exprimant que les deux faces de glissement nul sont les mêmes que celles de résistance nulle au glissement, c'est-à-dire que (4) $p_{x'z'}$ s'annule pour

[*] Cette équation est analogue à celle que M. Levy a eu l'idée d'établir entre les inconnues du problème de la poussée des terres [*Comptes rendus*, 7 février 1870, t. LXX, p. 230, équation (3)].

le même angle 2α, ou pour les mêmes deux angles α (différant entre eux d'un angle droit), que (7) $\frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'}$.

Observons encore qu'il y a aussi deux faces, faisant avec celles-ci 45 degrés, de glissements, l'un maximum, l'autre minimum, égaux entre eux au signe près; que, sur ces deux faces rectangulaires, les composantes normales de pression $p_{x'x'}$, $p_{z'z'}$ sont égales entre elles et à

$$\frac{p_{xx}+p_{zz}}{2}.$$

D'où il suit que dans le corps, à l'état où nous le supposons, les pressions intérieures peuvent être réduites à une pression normale $p=\frac{p_{xx}+p_{zz}}{2}$, égale en tous sens, et à une pression tangentielle K, s'exerçant sur une face déterminée, et engendrant par décomposition, sur les autres faces, des composantes tant tangentielles que normales de diverses intensités.

5. Au résumé, et en écrivant, pour nous rapprocher de la notation de M. Lamé, plus connue que celle de Coriolis,

$$N_x,\ N_z,\ T \quad \text{au lieu de} \quad p_{xx},\ p_{zz},\ p_{xz},$$

nous avons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dN_x}{dx}+\frac{dT}{dz}=-\rho\left(X-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dx}-w\frac{du}{dz}\right),\\
&\frac{dT}{dx}+\frac{dN_z}{dz}=-\rho\left(Z-\frac{dw}{dt}-u\frac{dw}{dx}-w\frac{dw}{dz}\right),\\
&\frac{du}{dx}+\frac{dw}{dz}=0,\\
&T^2+\left(\frac{N_z-N_x}{2}\right)^2=K^2,\\
&\frac{N_z-N_x}{2T}=\frac{\frac{dw}{dz}-\frac{du}{dx}}{\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}},
\end{aligned}\right.$$

pour les cinq équations d'hydrostéréodynamique ou de plasticodynamique destinées à déterminer les cinq inconnues u, w, N_x, N_z, T.

Si les équations (1), (2) des fluides supposés sans frottement ni viscosité ne peuvent que rarement être intégrées, il en sera de même, à

plus forte raison, de celles (9) des solides plastiques ou rendus tels par de fortes pressions. Nous ne chercherons donc pas ici à poser les équations bien plus compliquées relatives au cas général, où il faudrait considérer les trois dimensions et employer trois coordonnées.

Mais il doit être possible d'en poser qui soient encore assez simples, à deux coordonnées semi-polaires, r (le rayon vecteur) et z, applicables aux corps cylindriques placés dans des circonstances où tout reste symétrique autour d'un même axe pris pour celui des z. Je me borne à appeler l'attention et les recherches des savants sur ce cas intéressant, qui est celui de la plupart des expériences de M. Tresca.

6. Je ferai seulement une dernière remarque : c'est que si, aux six composantes de pressions ci-dessus

$$(10)\quad p_{xx}=\mathrm{N}_x,\quad p_{yy}=\mathrm{N}_y,\quad p_{zz}=\mathrm{N}_z,\quad p_{yz}=\mathrm{T}_x,\quad p_{zx}=\mathrm{T}_y,\quad p_{xy}=\mathrm{T}_z,$$

l'on ajoute respectivement les termes

$$(11)\quad 2\varepsilon\frac{du}{dx},\quad 2\varepsilon\frac{dv}{dy},\quad 2\varepsilon\frac{dw}{dz},\quad \varepsilon\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right),\quad \varepsilon\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right),\quad \varepsilon\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right),$$

représentant, comme on sait, ce qui vient du frottement dynamique dû aux vitesses de glissement relatif dans les fluides non visqueux se mouvant avec régularité, les équations des solides plastiques, ainsi complétées, s'étendront au cas où les vitesses avec lesquelles leur déformation s'opère, sans être considérables, ne seraient plus excessivement petites, et pourraient engendrer ces résistances particulières, ordinairement négligeables, dont on a parlé au n° 3. Les mêmes équations, avec tous ces termes, seraient propres, aussi, à exprimer les mouvements réguliers (c'est-à-dire pas assez prompts pour devenir tournoyants et tumultueux) des *fluides visqueux*, où il doit y avoir des composantes tangentielles de deux sortes, les unes variables avec les vitesses u, v, w, et mesurées par les produits (11) de ε et de leurs dérivées, les autres indépendantes de ces grandeurs des vitesses, ou les mêmes quelle que soit la lenteur du mouvement, et attribuables *à la viscosité*, dont K *représenterait alors le coefficient spécifique*.

(*Sera continué page 369 ci-après.*)

Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques;

PAR M. A. MANNHEIM.

Une lettre de sir William Thompson, insérée dans le tome XII de ce journal, 1re série, a été, comme l'on sait, l'occasion d'un travail très-intéressant de M. Liouville.

Dans ce travail, M. Liouville a démontré les propriétés fondamentales de la méthode de transformation qu'il a nommée *transformation par rayons vecteurs réciproques*.

C'est seulement à partir de cette publication que cette méthode de transformation a fixé, comme elle le méritait, l'attention des géomètres.

M. Liouville, le premier, fit connaître cette propriété importante, que, par une transformation directe d'une figure, on peut obtenir le résultat de transformations successives.

La démonstration qu'il en a donnée est purement analytique. Je ne crois pas qu'on en ait donné de démonstration géométrique pour ce qui concerne les figures de l'espace. Je viens aujourd'hui combler cette lacune.

Désignons par (F) une figure quelconque, par (F_1) sa transformée, par (F_2) la transformée de (F_1); je vais faire voir que l'on peut obtenir une figure symétrique de (F_2) par rapport à un plan en transformant directement la figure donnée (F).

Appelons o le pôle et p^2 la puissance de la première transformation, o_1 et p_1^2 le pôle et la puissance de la deuxième transformation; enfin o_2 le pôle de la transformation qui permettra d'obtenir une figure égale à (F_2), et dont il s'agit de prouver l'existence.

Soient a un point de (F), a_1 le point de (F_1) correspondant à a et a_2 le point de (F_2) correspondant à a_1. Si le pôle o_2 existe, il est sur la circonférence qui contient les trois points a, a_1, o_1. En effet, en vertu de la première transformation, cette circonférence se transforme en elle-même, et, comme elle contient le pôle o_1, le résultat de la deuxième transformation sera une droite. Pour obtenir directement une droite, on doit placer le pôle o_2 sur cette circonférence.

Je dis que le pôle o_2 doit être aussi un point de la droite oo_1, c'est-à-dire qu'alors ce pôle sera le point unique où la droite oo_1 rencontre la circonférence dont je viens de parler. Pour le montrer, employons une deuxième circonférence, celle qui passe par ce point, le point o et le point a. Considérée comme faisant partie de la première figure, elle se transforme suivant la droite $a_1 o_1$; mais cette ligne contenant le pôle o_1 se transforme en elle-même dans la deuxième transformation, c'est-à-dire qu'elle reste une droite.

Le pôle o_2, devant transformer la deuxième circonférence suivant une droite, doit être un point de cette courbe; il est donc au point où cette circonférence coupe la première, point qui n'est autre que celui où la première circonférence est rencontrée par la droite oo_1.

Désignons toujours ce point par o_2, et cherchons la puissance de transformation x^2 qu'il faut joindre à ce pôle pour compléter les données de la transformation directe dont nous nous proposons de montrer l'existence.

Considérons un point quelconque d de (F); appelons d_1 et d_2 les points correspondants de (F_1) et (F_2); enfin désignons par a_3 et d_3 les transformées de a et d en prenant o_2 et x^2 pour pôle et puissance de transformation.

Menons les droites ad, $a_1 d_1$, $a_2 d_2$, $a_3 d_3$, l'on a

$$a_3 d_3 = \frac{ad \times x^2}{o_2 a \times o_2 d};$$

mais, en employant la première transformation, on a

$$ad = \frac{a_1 d_1 \times p^2}{o a_1 \times o d_1}, \quad o_2 a = \frac{o_1 a_1 \times p^2}{oo_1 \times o a_1}, \quad o_2 d = \frac{o_1 d_1 \times p^2}{oo_1 \times o d_1}.$$

Portant ces valeurs dans la relation précédente et réduisant, il vient

$$a_3 d_3 = \frac{a_1 d_1}{o_1 a_1 \times o_1 d_1} \times \frac{x^2 . \overline{oo_1}^2}{p^2}.$$

Mais $\frac{a_1 d_1}{o_1 a_1 \times o_1 d_1} = \frac{a_2 d_2}{p_1^2}$; on a donc

$$a_3 d_3 = a_2 d_2 \times \frac{x^2 . \overline{oo_1}^2}{p^2 . p_1^2}.$$

Si nous voulons avoir $a_3 d_3 = a_2 d_2$, il faut que $x^2 = \frac{p^2 . p_1^2}{\overline{oo_1}^2}$.

La grandeur et la direction du segment ad n'entrant pas dans cette expression, cette valeur de x^2 est la puissance de transformation cherchée.

Joignons le point a aux points b et c situés sur le plan oao_1; désignons par b_1, c_1, b_2, c_2 les points correspondant à b et c. Désignons aussi par b_3, c_3 les points transformés de b et de c par rapport à o_2, en adoptant pour puissance la valeur de x^2 que nous venons de trouver.

Les deux triangles $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$, d'après ce qui précède, auront leurs côtés égaux chacun à chacun.

Je dis que ces côtés sont également inclinés sur la droite oo_1. Décrivons une circonférence passant par les points o_2, a, b : la tangente en o_2 à cette circonférence est parallèle à $a_3 b_3$. En transformant cette circonférence par rapport au pôle o, elle devient une circonférence passant par $o_1 a_1 b_1$; la tangente au point o_1 à cette circonférence est parallèle à $a_2 b_2$. Mais les tangentes en o_2 et o_1 à ces deux circonférences sont également inclinées sur la droite oo_1; il en est donc de même des droites $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ qui leur sont parallèles.

Il résulte de là que les deux triangles $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ ne peuvent pas être amenés à se superposer par simple glissement; mais l'un peut être amené à coïncider avec le symétrique de l'autre obtenu par rapport à une perpendiculaire à la droite oo_1.

Joignons le point d_2 aux sommets du triangle $a_2 b_2 c_2$, le point d_3 aux sommets a_3, b_3, c_3. Les distances des points d_2 et d_3 aux sommets de ces triangles sont respectivement égales; par suite, les points d_2 et d_3 sont à égale distance du plan de ces triangles.

Lorsque les deux triangles sont amenés à être symétriques par rapport à une perpendiculaire à oo_1, les points d_1, d_2 sont symétriques par rapport au plan mené par cette droite perpendiculairement à oo_1. Comme tous les points de (F) peuvent être déterminés par leurs distances aux sommets du triangle abc, ce que je viens de dire pour le point d s'étend à tous les points de cette figure.

Ainsi, *la figure* (F_3), *que l'on peut obtenir en transformant directement* (F) *par rapport à* o_2, *peut être amenée à coïncider avec la figure symétrique de* (F_2) *prise par rapport à un plan perpendiculaire à* oo_1.

Ce résultat obtenu, il est facile de voir comment l'on doit continuer lorsque l'on a un plus grand nombre de transformations.

Théorie des perturbations de la Lune qui sont dues à l'action des planètes;

PAR M. SIMON **NEWCOMB.**

§ I.

Tous les géomètres qui se sont occupés jusqu'ici de la théorie de la Lune ont considéré le problème comme celui de déterminer les perturbations du mouvement elliptique de la Lune autour de la Terre. Lorsqu'il ne s'agit que du mouvement du système de trois corps que forment le Soleil, la Lune et la Terre, cette manière d'aborder le problème est la plus facile que les géomètres ont jusqu'ici imaginée. Mais, lorsqu'on considère les perturbations qui sont produites par les planètes, cette méthode est sujette à l'inconvénient de donner deux sortes de perturbations : l'une, celles qui sont produites par l'action directe de la planète sur la Terre et la Lune; l'autre, celles qui sont produites par les altérations de la force perturbatrice du Soleil à cause des perturbations du mouvement de la Terre autour du Soleil. Il s'ensuit qu'on ne peut déterminer les perturbations dont il s'agit à moins qu'on ne détermine d'abord complétement les perturbations du mouvement de la Terre. De plus, l'action perturbatrice du Soleil sur la Lune étant sensiblement différente à cause des perturbations exercées sur la Lune par la planète, il faut pousser les approximations à la deuxième ou même à la troisième dimension de la force perturbatrice du Soleil multipliée par la force perturbatrice de la planète, ce qui rend le problème bien complexe et bien difficile.

La force perturbatrice de la planète étant actuellement bien petite, et les deux sortes de perturbations susdites étant du même ordre de grandeur, ne peut-on pas effectuer l'intégration de manière à éviter ses produits par la force perturbatrice du Soleil? Pour ce but, il est nécessaire et suffisant qu'on regarde l'attraction du Soleil comme une

des forces principales du système, au lieu de la regarder comme force perturbatrice. Si l'on considère le mouvement d'un système de trois corps abandonnés à leur attraction mutuelle, on sait qu'on peut exprimer les coordonnées de chaque corps en fonction de dix-huit constantes arbitraires, et du temps. En prenant le Soleil, la Terre et la Lune comme un tel système, on sait que plusieurs géomètres modernes sont parvenus à obtenir ces expressions avec un haut degré d'approximation. Donc, pour obtenir avec toute rigueur les intégrales du mouvement, dans le cas où l'on introduit la force perturbatrice d'une planète, il suffit de regarder ces dix-huit constantes comme variables, et de les déterminer en fonction du temps par la méthode célèbre de Lagrange.

§ II.

Soient :

ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées rectangulaires du Soleil rapportées à des axes quelconques fixes dans l'espace;

ξ_2, η_2, ζ_2 les coordonnées correspondantes de la Terre;

ξ_3, η_3, ζ_3 les coordonnées correspondantes de la Lune;

m_1 la masse du Soleil;

m_2 celle de la Terre;

m_3 celle de la Lune;

Ω le potentiel de la force mutuelle attractive de ces trois corps que l'on forme en prenant la somme des produits des masses de chaque paire des corps divisée par leur distance mutuelle;

R les termes qui sont ajoutés au potentiel par l'action perturbatrice de la planète.

Supposons d'abord que les trois corps dont il s'agit soient abandonnés à leur attraction mutuelle. On sait que les équations différentielles de leur mouvement peuvent s'écrire sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2\xi_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\xi_i}, \\ m_i \dfrac{d^2\eta_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\eta_i}, \\ m_i \dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\zeta_i}. \end{cases}$$

Dans ces équations, on attribue successivement à l'indice i les valeurs 1, 2 et 3, pour obtenir les équations qui correspondent au mouvement du Soleil, de la Terre et de la Lune.

La forme la plus générale des intégrales de ces équations sera

$$(2)\quad \begin{cases} \xi_1 = F_1, & \eta_1 = \psi_1, & \zeta_1 = \varphi_1; \\ \xi_2 = F_2, & \eta_2 = \psi_2, & \zeta_2 = \varphi_2; \\ \xi_3 = F_3, & \eta_3 = \psi_3, & \zeta_3 = \varphi_3. \end{cases}$$

Chacune des expressions F, ψ, φ est fonction du temps et de dix-huit constantes arbitraires, lesquelles peuvent être représentées par

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ldots,\quad a_{18}.$$

Supposons maintenant qu'on soit parvenu à trouver des expressions de la forme (2) qui satisfassent aux équations différentielles (1). Cherchons comment on peut faire usage de ces expressions pour obtenir les intégrales complètes du mouvement des trois corps quand ils sont troublés par l'action d'une planète. Posons :

m_4 la masse de la planète ;

$\Delta_{1,4}$, $\Delta_{2,4}$, $\Delta_{3,4}$ sa distance au Soleil, à la Terre et à la Lune respectivement. Nous aurons

$$R = \frac{m_1 m_4}{\Delta_{1,4}} + \frac{m_2 m_4}{\Delta_{2,4}} + \frac{m_3 m_4}{\Delta_{3,4}}.$$

Les équations qu'il faut intégrer seront

$$(3)\quad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2\xi_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\xi_i} + \dfrac{dR}{d\xi_i}, \\ m_i \dfrac{d^2\eta_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\eta_i} + \dfrac{dR}{d\eta_i}, \\ m_i \dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\zeta_i} + \dfrac{dR}{d\zeta_i}, \end{cases}$$

dans lesquelles, comme précédemment, il faut attribuer à l'indice i successivement les valeurs 1, 2, 3.

La théorie de la variation des constantes arbitraires, telle qu'elle a été développée par l'immortel Lagrange, nous conduit à ce résultat, que les équations (3) peuvent être satisfaites par les intégrales (2),

pourvu qu'on substitue, pour les constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$, dix-huit fonctions du temps, qu'on détermine de la manière que voici :

Qu'on différentie les équations (2) en y regardant le temps t seul comme variable, et qu'on pose

$$(4)\quad \begin{cases} \xi'_1 = \dfrac{dF_1}{dt}, & \eta'_1 = \dfrac{d\psi_1}{dt}, & \zeta'_1 = \dfrac{d\varphi_1}{dt}; \\ \xi'_2 = \dfrac{dF_2}{dt}, & \eta'_2 = \dfrac{d\psi_2}{dt}, & \zeta'_2 = \dfrac{d\varphi_2}{dt}; \\ \xi'_3 = \dfrac{dF_3}{dt}, & \eta'_3 = \dfrac{d\psi_3}{dt}, & \zeta'_3 = \dfrac{d\varphi_3}{dt}; \end{cases}$$

qu'on forme ensuite des équations (2) et (4) les dérivées partielles de chacune des dix-huit quantités $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ rapportées à chacune des constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$, et, de ces dérivées, qu'on forme, pour chaque couple des constantes arbitraires, les expressions

$$(a, a', 1) = \frac{d\xi_1}{da}\frac{d\xi'_1}{da'} - \frac{d\xi_1}{da'}\frac{d\xi'_1}{da} + \frac{d\eta_1}{da}\frac{d\eta'_1}{da'} - \frac{d\eta_1}{da'}\frac{d\eta'_1}{da} + \frac{d\zeta_1}{da}\frac{d\zeta'_1}{da'} - \frac{d\zeta_1}{da'}\frac{d\zeta'_1}{da},$$

$$(a, a', 2) = \frac{d\xi_2}{da}\frac{d\xi'_2}{da'} - \frac{d\xi_2}{da'}\frac{d\xi'_2}{da} + \frac{d\eta_2}{da}\frac{d\eta'_2}{da'} - \frac{d\eta_2}{da'}\frac{d\eta'_2}{da} + \frac{d\zeta_2}{da}\frac{d\zeta'_2}{da'} - \frac{d\zeta_2}{da'}\frac{d\zeta'_2}{da},$$

$$(a, a', 3) = \frac{d\xi_3}{da}\frac{d\xi'_3}{da'} - \frac{d\xi_3}{da'}\frac{d\xi'_3}{da} + \frac{d\eta_3}{da}\frac{d\eta'_3}{da'} - \frac{d\eta_3}{da'}\frac{d\eta'_3}{da} + \frac{d\zeta_3}{da}\frac{d\zeta'_3}{da'} - \frac{d\zeta_3}{da'}\frac{d\zeta'_3}{da},$$

$$(5)\qquad (a, a') = m_1(a, a', 1) + m_2(a, a', 2) + m_3(a, a', 3);$$

qu'on substitue dans l'expression R, pour ξ, η, ζ, dont $\Delta_{1,4}, \Delta_{2,4}, \Delta_{3,4}$ sont des fonctions, leurs valeurs (3), par où R deviendra fonction des arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$, et du temps, et qu'on forme les dix-huit équations différentielles simultanées

$$(6)\quad \begin{cases} (a_1, a_2)\dfrac{da_2}{dt} + (a_1, a_3)\dfrac{da_3}{dt} + (a_1, a_4)\dfrac{da_4}{dt} + \ldots + (a_1, a_{18})\dfrac{da_{18}}{dt} = \dfrac{dR}{da_1}, \\ (a_2, a_1)\dfrac{da_1}{dt} + (a_2, a_3)\dfrac{da_3}{dt} + (a_2, a_4)\dfrac{da_4}{dt} + \ldots + (a_2, a_{18})\dfrac{da_{18}}{dt} = \dfrac{dR}{da_2}, \\ (a_3, a_1)\dfrac{da_1}{dt} + (a_3, a_2)\dfrac{da_2}{dt} + (a_3, a_4)\dfrac{da_4}{dt} + \ldots + (a_3, a_{18})\dfrac{da_{18}}{dt} = \dfrac{dR}{da_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a_{18}, a_1)\dfrac{da_1}{dt} + (a_{18}, a_2)\dfrac{da_2}{dt} + (a_{18}, a_3)\dfrac{da_3}{dt} + \ldots + (a_{18}, a_{17})\dfrac{da_{17}}{dt} = \dfrac{dR}{da_{18}}. \end{cases}$$

Alors, en substituant, dans les équations (2), pour $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$, des fonctions du temps qui puissent satisfaire à ces équations (6), les intégrales (2) satisferont identiquement aux équations (3), et seront, par conséquent, celles que nous cherchons.

On remarque que, puisque nous avons

$$(a_i, a_i) = 0,$$
$$(a_i, a_j) = -(a_j, a_i),$$

le nombre total des coefficients (a_i, a_j) qu'il faut calculer se monte au plus à

$$\frac{17 \times 18}{2} = 153.$$

Chacune de ces quantités étant composée de dix-huit produits d'expressions fort complexes, s'il fallait calculer chacune à part, le problème serait presque inabordable. Mais nous verrons dans la suite qu'on peut choisir les constantes arbitraires de manière à simplifier beaucoup le problème. Pour ce but, il faut d'abord considérer la forme qu'on peut donner aux expressions (2).

§ III.

Nous nous rappellerons que les expressions (2) sont, par hypothèse, la solution complète du problème des trois corps. Voyons les données que les géomètres nous ont fournies pour une telle solution dans les cas que nous considérons.

1. Nous avons la solution du problème du mouvement du centre de gravité de la Terre et de la Lune autour du Soleil. On sait que, quand le nombre des corps attractifs s'est réduit à ces trois, ce centre se meut à peu près dans une ellipse dont le périhélie a un mouvement séculaire très-lent, la déviation de cette ellipse étant si petite que les astronomes l'ont négligée jusqu'ici. Cependant nous ne la négligerons pas jusqu'à ce que nous ayons montré qu'elle est sans effet dans le problème dont il s'agit. Les coordonnées elliptiques du centre de gra-

vité rapportées au Soleil sont fonctions de six constantes arbitraires que nous pouvons regarder comme les éléments elliptiques du mouvement relatif du Soleil et dudit centre, et les déviations de l'ellipse sont fonctions de ces éléments et aussi des éléments du mouvement de la Lune autour de la Terre.

2. Le problème du mouvement relatif de la Lune autour de la Terre a été traité avec tant de succès par MM. Hansen, Delaunay, et d'autres grands géomètres de notre siècle, qu'il nous est permis de le considérer comme résolu avec un degré d'approximation bien au delà de nos présents besoins. La solution de M. Hansen n'étant pas donnée en forme analytique, nous adopterons la solution de M. Delaunay, qu'on peut trouver dans le tome II de sa *Théorie du mouvement de la Lune*. En toute rigueur, il faut compléter la solution en y ajoutant les termes qui proviennent du mouvement de la Terre relativement au centre de gravité de la Terre et de la Lune, ce qui est bien facile. Ainsi, nous aurons les coordonnées relatives de la Lune et de la Terre en fonction des six constantes arbitraires qui sont propres au mouvement de la Lune, et des six éléments du mouvement elliptique du centre commun de gravité de la Lune et de la Terre autour du Soleil.

3. Ayant ainsi obtenu des expressions pour le mouvement relatif de ces trois corps, il nous reste à fixer le mouvement de l'un quelconque des corps, ou bien de leur centre commun de gravité. On sait que ce centre se meut en ligne droite avec une vitesse uniforme. Les six éléments de ce mouvement feront le nombre complet des constantes arbitraires du problème.

Posons :

x, y, z les coordonnées rectangulaires de la Lune rapportées à la Terre;

X, Y, Z les coordonnées rectangulaires du Soleil rapportées au centre de gravité de la Terre et de la Lune;

a, b, c les coordonnées arbitraires du centre commun de gravité du Soleil, de la Terre et de la Lune à l'origine du temps;

a', b', c' ses vitesses arbitraires dans le sens des axes des coordonnées.

Posons de plus, pour abréger,

$$(7)\qquad \begin{cases} \mu = \dfrac{m_3}{m_2+m_3}, \\ \mu' = \dfrac{m_2+m_3}{m_1+m_2+m_3}; \end{cases}$$

nous aurons

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \mu' X + a + a't, \\ \eta_1 = \mu' Y + b + b't, \\ \zeta_1 = \mu' Z + c + c't; \\ \xi_2 = (\mu'-1)X - \mu x + a + a't, \\ \eta_2 = (\mu'-1)Y - \mu y + b + b't, \\ \zeta_2 = (\mu'-1)Z - \mu z + c + c't; \\ \xi_3 = (\mu'-1)X + (1-\mu)x + a + a't, \\ \eta_3 = (\mu'-1)Y + (1-\mu)y + b + b't, \\ \zeta_3 = (\mu'-1)Z + (1-\mu)z + c + c't. \end{cases}$$

Telle est la forme que peuvent prendre les équations (2). En les différentiant, y regardant le temps seul comme variable, et posant

$$X' = \frac{dX}{dt}, \ldots,$$

nous trouvons

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi'_1 = \mu' X' + a', \\ \eta'_1 = \mu' Y' + b', \\ \zeta'_1 = \mu' Z' + c'; \\ \xi'_2 = (\mu'-1)X' - \mu x' + a', \\ \eta'_2 = (\mu'-1)Y' - \mu y' + b', \\ \zeta'_2 = (\mu'-1)Z' - \mu z' + c'; \\ \xi'_3 = (\mu'-1)X' + (1-\mu)x' + a', \\ \eta'_3 = (\mu'-1)Y' + (1-\mu)y' + b', \\ \zeta'_3 = (\mu'-1)Z' + (1-\mu)z' + c'. \end{cases}$$

En prenant les dérivées partielles de ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', en faisant varier les constantes a, b, c, a', b', c', nous avons

$$\frac{d\xi_1}{da} = \frac{d\eta_1}{db} = \frac{d\zeta_1}{dc} = \frac{d\xi_2}{da} = \ldots = \frac{d\zeta_3}{dc} = 1,$$

$$\frac{d\xi_i}{da'} = \frac{d\eta_i}{db'} = \frac{d\zeta_i}{dc'} = t,$$

$$\frac{d\xi'_i}{da'} = \frac{d\eta'_i}{db'} = \frac{d\zeta'_i}{dc'} = 1.$$

En formant les expressions (5) à l'aide de ces valeurs des dérivées partielles, nous trouvons

$$(a, a') = (b, b') = (c, c') = m_1 + m_2 + m_3,$$

tandis que toutes les autres combinaisons des six éléments a, b, c, a', b', c' s'évanouissent.

Les coordonnées relatives X, Y, Z, x, y, z ne contiennent aucun de ces six éléments, mais seulement les douze autres. Soit e l'un quelconque de ceux-ci. Les formules (5), étant combinées avec celles au-dessus, nous donneront

$$(a, e, 1) = \frac{d\xi'_1}{de},$$

$$(a, e, 2) = \frac{d\xi'_2}{de},$$

$$(a, e, 3) = \frac{d\xi'_3}{de},$$

$$(a, e) = \frac{d}{de}(m_1\xi'_1 + m_2\xi'_2 + m_3\xi'_3).$$

Mais nous avons, par la propriété fondamentale du centre de gravité,

$$m_1\xi'_1 + m_2\xi'_2 + m_3\xi'_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a',$$

ce qui ne contient pas e; donc

$$(a, e) = 0.$$

De même, nous avons

$$(b, e) = 0,$$

$$(c, e) = 0.$$

En faisant usage encore des formules (5) et en les combinant avec (10), on conclut

$$(a', e, 1) = t\frac{d\xi'_1}{de} - \frac{d\xi_1}{de},$$

$$(a', e, 2) = t\frac{d\xi'_2}{de} - \frac{d\xi_2}{de},$$

$$(a', e, 3) = t\frac{d\xi'_3}{de} - \frac{d\xi_3}{de},$$

$$(a', e) = t\frac{d}{de}(m_1\xi'_1 + m_2\xi'_2 + m_3\xi'_3) - \frac{d}{de}(m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3).$$

Les coordonnées du centre de gravité ne contenant pas e, nous avons

$$(a', e) = 0,$$

et, de la même manière,

$$(b', e) = 0,$$
$$(c', e) = 0.$$

Nous voyons donc que toutes les combinaisons des six éléments qui fixent la position du centre de gravité avec les douze éléments du mouvement relatif des corps s'évanouissent identiquement. Et toutes les combinaisons des mêmes six éléments l'un avec l'autre s'évanouissent, à l'exception de celles dont venons de trouver la valeur $m_1 + m_2 + m_3$. Celles-ci, étant substituées dans les équations générales (6), nous donnent

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{da'}{dt} = \frac{dR}{da},$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{db'}{dt} = \frac{dR}{db},$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{dc'}{dt} = \frac{dR}{dc},$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{da}{dt} = -\frac{dR}{da'} = -t\frac{dR}{da},$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{db}{dt} = -\frac{dR}{db'} = -t\frac{dR}{db},$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{dc}{dt} = -\frac{dR}{dc'} = -t\frac{dR}{dc}.$$

Ces équations contiennent seulement le principe de la conservation du centre de gravité. Les dérivées partiellles $\frac{d\mathrm{R}}{da}, \frac{d\mathrm{R}}{db}, \frac{d\mathrm{R}}{dc}$ indiquent les sommes des forces accélératrices qui agissent sur les trois corps dans le sens des trois axes des coordonnées, tandis que $\frac{da'}{dt}, \frac{db'}{dt}, \frac{dc'}{dt}$ expriment les accélérations du mouvement du centre de gravité. Si, pour le moment, on appelle ξ une des coordonnées de ce centre, nous avons par hypothèse

$$\xi = a + a't;$$

donc

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{da}{dt} + t\frac{da'}{dt} + a'.$$

Les équations que nous venons de trouver donnent

$$\frac{da}{dt} + t\frac{da'}{dt} = 0;$$

donc

$$\frac{d\xi}{dt} = a',$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{d^2\xi}{dt^2} = (m_1 + m_3 + m_3)\frac{da'}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{da}.$$

Les équations correspondant aux trois axes coordonnés sont celles de la conservation du centre de gravité.

Comme, dans la théorie de la Lune, nous n'avons pas besoin de connaître les douze éléments dont dépend la position de la Lune relativement à la Terre; nous nous dispenserons de la considération des éléments qui se rapportent au centre de gravité. Nous avons montré que toutes les combinaisons (e, a), (e, a'), etc., de l'un quelconque des éléments que nous cherchons avec l'un quelconque des éléments qui fixent la position du centre de gravité, s'évanouissent; nous n'avons qu'à considérer les combinaisons des douze éléments entre eux-mêmes. Le nombre des combinaisons se réduit à

$$\frac{11 \times 12}{2} = 66.$$

Représentons par a, e deux quelconques de ces douze éléments qui entrent dans X, Y, Z, x, y, z. Différentions les équations (8) et (9) par rapport aux éléments a et e, et formons les expressions (5). Si nous posons, pour abréger,

$$(10)\left\{\begin{aligned}(a,e,\mathrm{X}) &= \frac{d\mathrm{X}}{da}\frac{d\mathrm{X}'}{de} - \frac{d\mathrm{X}}{de}\frac{d\mathrm{X}'}{da} + \frac{d\mathrm{Y}}{da}\frac{d\mathrm{Y}'}{de} - \frac{d\mathrm{Y}}{de}\frac{d\mathrm{Y}'}{da} + \frac{d\mathrm{Z}}{da}\frac{d\mathrm{Z}'}{de} - \frac{d\mathrm{Z}}{de}\frac{d\mathrm{Z}'}{da},\\ (a,e,x) &= \frac{dx}{da}\frac{dx'}{de} - \frac{dx}{de}\frac{dx'}{da} + \frac{dy}{da}\frac{dy'}{de} - \frac{dy}{de}\frac{dy'}{da} + \frac{dz}{da}\frac{dz'}{de} - \frac{dz}{de}\frac{dz'}{da},\\ (a,e,\mathrm{X},x) &= \frac{d\mathrm{X}}{da}\frac{dx'}{de} - \frac{d\mathrm{X}}{de}\frac{dx'}{da} + \frac{d\mathrm{X}'}{de}\frac{dx}{da} - \frac{d\mathrm{X}'}{da}\frac{dx}{de}\\ &+ \frac{d\mathrm{Y}}{da}\frac{dy'}{de} - \frac{d\mathrm{Y}}{de}\frac{dy'}{da} + \frac{d\mathrm{Y}'}{de}\frac{dy}{da} - \frac{d\mathrm{Y}'}{da}\frac{dy}{de}\\ &+ \frac{d\mathrm{Z}}{da}\frac{dz'}{de} - \frac{d\mathrm{Z}}{de}\frac{dz'}{da} + \frac{d\mathrm{Z}'}{de}\frac{dz}{da} - \frac{d\mathrm{Z}'}{da}\frac{dz}{de},\end{aligned}\right.$$

les équations (5) prendront la forme

$$(a,e,1) = \mu'^2(a,e,\mathrm{X}),$$

$$(a,e,2) = (1-\mu')^2(a,e,\mathrm{X}) + \mu^2(a,e,x) + \mu(1-\mu')(a,e,\mathrm{X},x),$$

$$(a,e,3) = (1-\mu')^2(a,e,\mathrm{X}) + (1-\mu)^2(a,e,x) - (1-\mu)(1-\mu')(a,e,\mathrm{X},x);$$

et, en ayant égard aux valeurs (7) de μ et μ',

$$(11)\qquad (a,e) = \frac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}(a,e,\mathrm{X}) + \frac{m_2 m_3}{m_2+m_3}(a,e,x).$$

§ IV.

Dans la solution complète du problème des trois corps, comme il a été présenté par les géomètres, la longitude de la Lune rapportée à l'écliptique, sa latitude au-dessus de ce plan et sa distance au centre de la Terre peuvent s'exprimer dans la forme

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} v &= l + \Sigma k \sin \mathrm{N},\\ \beta &= \Sigma c \sin \mathrm{N}',\\ r &= \Sigma k' \cos \mathrm{N}.\end{aligned}\right.$$

Les coefficients k, c et k' représentent des fonctions des cinq constantes arbitraires a, e, γ, a', e', qui ont les significations suivantes :

a, a' les distances moyennes de la Lune et du Soleil ;

e, e' les excentricités de leurs orbites;

γ le sinus de la demi-inclinaison de l'orbite de la Lune à l'écliptique.

N, N′ sont des fonctions linéaires des quatre quantités que l'on peut regarder comme représentant :

1° La distance moyenne de la Lune à son nœud;

2° La distance moyenne du Soleil au même nœud;

3° La distance du périgée de la Lune au même nœud;

4° La distance du périgée du Soleil au même nœud.

Chacune de ces quatre quantités est de la forme

$$A + bt,$$

A étant une constante arbitraire, et b fonction de a, a', e, e', γ. Le signe Σ représente une somme infinie de termes, chaque valeur de N ayant sa propre valeur de k et k', et chaque valeur de N′ sa propre valeur de c.

l est la longitude moyenne de la Lune. Le point d'où nous comptons cette longitude étant tout à fait arbitraire et indépendant des quatre arbitraires dont N se compose, il y a dix constantes arbitraires qui entrent dans les expressions de v, β et r. Les deux arbitraires qui fixent la position du plan arbitraire de XY font le nombre entier douze.

Si nous posons

$$\partial v = \Sigma k \sin N,$$

ce qui donne

$$v = l + \partial v,$$

et si nous représentons par ξ, η, ζ les coordonnées rectangulaires de la Lune, rapportées à l'écliptique, nous avons

$$(13) \quad \begin{cases} \xi = r\cos\beta\cos v = r\cos\beta\cos l\cos\partial v - r\cos\beta\sin l\sin\partial v, \\ \eta = r\cos\beta\sin v = r\cos\beta\sin l\cos\partial v + r\cos\beta\cos l\sin\partial v, \\ \zeta = r\sin\beta. \end{cases}$$

Les quantités β et δv étant très-petites, on peut développer $r\cos\beta\cos\delta v$, $r\cos\beta\sin\delta v$, et $r\sin\beta$ en une série convergente. Comme nous avons

$$\sin\delta v = \delta v\left(1 - \frac{\delta v^2}{2.3} + \frac{\delta v^4}{2.3.4.5} - \dots\right),$$
$$\cos\delta v = 1 - \frac{\delta v^2}{2} + \frac{\delta v^4}{2.3.4} - \dots,$$
$$\sin\beta = \beta\left(1 - \frac{\beta^2}{2.3} + \frac{\beta^4}{2.3.4.5} - \dots\right),$$
$$\cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{2.3.4} - \dots;$$

nous voyons facilement que ce développement se mettra sous la forme

$$r\cos\beta\cos\delta v = \Sigma h\cos\mathrm{N},$$
$$r\cos\beta\sin\delta v = \Sigma h'\sin\mathrm{N},$$
$$r\sin\beta = \Sigma c'\sin\mathrm{N}',$$

h, c et N ayant la même forme que dans les valeurs de v, β et r.

En substituant ces valeurs dans les expressions précédentes pour ξ, η et ζ, celles-ci deviennent

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \Sigma k\cos(l + \mathrm{N}),\\ \eta &= \Sigma k\sin(l + \mathrm{N}),\\ \zeta &= \Sigma c'\sin\mathrm{N}', \end{aligned}\right.$$

où $k = h \pm h'$, et chaque valeur de N est encore fonction linéaire des quatre éléments que nous venons de définir, mais n'est pas nécessairement identique avec les valeurs de N dans les expressions de v.

Supposons donc qu'on rapporte la position de la Lune à un système quelconque d'axes rectangulaires fixe dans l'espace, mais ayant leur origine au centre de la Terre. Si l'on représente par a, b, c, a′, b′, c′, a″, b″, c″ les cosinus des angles que font les axes avec ceux qui se rapportent à l'écliptique, de sorte que

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{a}\xi + \mathrm{b}\eta + \mathrm{c}\xi,\\ y &= \mathrm{a}'\xi + \mathrm{b}'\eta + \mathrm{c}'\zeta,\\ z &= \mathrm{a}''\xi + \mathrm{b}''\eta + \mathrm{c}''\zeta, \end{aligned}\right.$$

et si l'on représente par :

θ' la longitude du nœud ascendant de l'écliptique sur le plan de XY, comptée de l'axe positif de X dans le sens de l'axe positif de Y;

τ la longitude du même nœud, comptée de l'axe de Ξ, dont nous supposons qu'on a compté la longitude moyenne l;

γ' le sinus de la demi-inclinaison de l'écliptique sur le plan XY, nous aurons

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{a} &= (1-\gamma'^2)\cos(\theta'-\tau)+\gamma'^2\cos(\theta'+\tau),\\ \mathrm{b} &= -(1-\gamma'^2)\sin(\theta'-\tau)+\gamma'^2\sin(\theta'+\tau),\\ \mathrm{c} &= 2\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin\theta';\\ \mathrm{a}' &= (1-\gamma'^2)\sin(\theta'-\tau)+\gamma'^2\sin(\theta'+\tau),\\ \mathrm{b}' &= (1-\gamma'^2)\cos(\theta'-\tau)-\gamma'^2\cos(\theta'+\tau),\\ \mathrm{c}' &= -2\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\cos\theta';\\ \mathrm{a}'' &= -2\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin\tau,\\ \mathrm{b}'' &= 2\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\cos\tau,\\ \mathrm{c}'' &= 1-2\gamma'^2. \end{aligned}\right.$$

Si, dans les équations (15) nous substituons les valeurs (14) de ξ, η, ζ, et les valeurs (16) de a, b, c,..., nous trouvons

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} x = {} & \Sigma k_i(1-\gamma'^2)\cos(\theta'-\tau+l+\mathrm{N}_i)\\ & +\Sigma k_i\gamma'^2\cos(\theta'+\tau-l-\mathrm{N}_i)\\ & -\Sigma c_i\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\theta'+\mathrm{N}'_i)\\ & +\Sigma c_i\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\theta'-\mathrm{N}'_i),\\ y = {} & \Sigma k_i(1-\gamma'^2)\sin(\theta'-\tau+l+\mathrm{N}_i)\\ & +\Sigma k_i\gamma'^2\sin(\theta'+\tau-l-\mathrm{N}_i)\\ & -\Sigma c_i\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin(\theta'+\mathrm{N}'_i)\\ & +\Sigma c_i\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin(\theta'-\mathrm{N}'_i),\\ z = {} & 2\Sigma k_i\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin(l-\tau+\mathrm{N}_i)\\ & +\Sigma c_i(1-2\gamma'^2)\sin\mathrm{N}'_i. \end{aligned}\right.$$

Nous voyons que les coefficients des sinus et cosinus des angles variables sont des fonctions des six arbitraires

$$a, \quad e, \quad \gamma, \quad a', \quad e', \quad \gamma',$$

et que les parties constantes de ces angles sont fonction de six autres arbitraires, car ces angles ne contiennent que N, N', θ' et $\tau - l$. Nous avons déjà montré que N et N' sont des fonctions de quatre arbitraires. On peut regarder la partie constante de $\tau - l$ comme fonction d'une seule arbitraire, de sorte qu'avec θ le nombre entier se monte à six.

Il faut toujours nous rappeler qu'en faisant abstraction de θ', chacun des angles qui se trouvent sous le signe *sin* ou *cos* est de la forme

$$\mathrm{A} + bt,$$

ou b est fonction des arbitraires a, e, γ, a', e'.

Pour réduire les valeurs (17) de x, y et z à une forme générale, mettant en évidence les constantes arbitraires, posons :

λ la distance moyenne de la Lune à son nœud sur l'écliptique ;
λ' la distance moyenne du Soleil au même nœud;
ω la distance du périgée de la Lune au même nœud;
ω' la distance du périgée du Soleil au même nœud.

Donc, chaque valeur de N et N' est fonction linéaire à coefficients constants et entiers des quatre quantités λ, λ', ω, ω'. De plus, déterminons les cinq quantités

$$\varepsilon, \quad \pi, \quad \vartheta, \quad \varepsilon', \quad \pi',$$

par les équations

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \theta' + l - \tau,\\
\vartheta &= \varepsilon - \lambda,\\
\pi &= \vartheta + \omega,\\
\varepsilon' &= \lambda' - \lambda + \varepsilon,\\
\pi' &= \vartheta + \omega';
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} l-\tau &= \varepsilon-\theta',\\ \lambda &= \varepsilon-\theta,\\ \lambda' &= \varepsilon'-\theta,\\ \omega &= \pi-\theta,\\ \omega' &= \pi'-\theta. \end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs dans (17), en ayant égard à la forme de N_i, nous voyons que x, y et z peuvent se mettre sous la forme

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \Sigma k\cos(i\varepsilon+i'\pi+i''\theta+i'''\varepsilon'+i^{\text{IV}}\pi'+i^{\text{V}}\theta'),\\ y &= \Sigma k\sin(i\varepsilon+i'\pi+i''\theta+i'''\varepsilon'+i^{\text{IV}}\pi'+i^{\text{V}}\theta'),\\ z &= \Sigma c\sin(j\varepsilon+j'\pi+j''\theta+j'''\varepsilon'+j^{\text{IV}}\pi'+j^{\text{V}}\theta'); \end{aligned}\right.$$

les coefficients i et j étant des nombres entiers assujettis aux conditions

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} i+i'+i''+i'''+i^{\text{IV}}+i^{\text{V}} &= 1,\\ j+j'+j''+j'''+j^{\text{IV}}+j^{\text{V}} &= 0, \end{aligned}\right.$$

k et c étant des fonctions des six arbitraires

$$a,\quad e,\quad \gamma,\quad a',\quad e',\quad \gamma',$$

et ε, π, θ', ε', π' étant chacune de la forme

$$\text{const.}+bt,$$

où b est fonction des mêmes arbitraires que contiennent k et c.

§ V.

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré comment, en partant des expressions connues des coordonnées polaires du Soleil et de la Lune rapportées à l'écliptique, nous pouvons exprimer les coordonnées rectangulaires x, y, z, X, Y, Z, rapportées à des axes quelconques, en fonction de douze constantes arbitraires et du temps. Maintenant, il faut, en partant de ces expressions, déduire les valeurs des soixante-six fonctions (a, e) dont les expressions sont données par

les équations (11). S'il fallait, pour ce but, former complétement les expressions (a, e, X), (a, e, x), le travail serait inabordable, à cause de la longueur des calculs. Mais nous pouvons rendre le calcul à la fois élégant et facile, en faisant usage du théorème célèbre de Lagrange, que chaque combinaison, que nous représentons par (a, e), est fonction des constantes arbitraires seules, et ne peut contenir le temps explicitement.

En vertu de ce théorème, nous pouvons, dans la valeur de (a, e), faire $t = 0$; c'est-à-dire, nous pouvons négliger tous les termes qui contiennent le temps comme facteur, parce que leur somme doit s'évanouir identiquement. Nous pouvons aussi négliger la somme de tous les termes périodiques. Car si

$$(a, e) = \sum c \,{}^{\sin}_{\cos}(a + bt),$$

nous avons

$$0 = \frac{d(a, e)}{dt} = \pm \sum bc \,{}^{\cos}_{\sin}(a + bt),$$

équation qui ne peut être satisfaite, à moins qu'on n'ait $b = 0$ ou $c = 0$. Puisque toute fonction linéaire à coefficients constants des quantités périodiques est elle-même périodique, et puisque (a, e) (11) est une telle fonction de (a, e, X) et (a, e, x), il s'ensuit que

$$(21) \qquad (a, e) = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}(a, e, x)_0 + \frac{m_1(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}(a, e, X)_0,$$

en désignant par $(a, e, x)_0$ et (a, e, X_0), ce que deviennent (a, e, x) et (a, e, X) lorsque nous omettons tous les termes périodiques et tous les termes qui contiennent le temps t en facteur.

Reprenons les équations (19), en y mettant

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon_0 + nt,\\
\pi &= \pi_0 + \pi_1 t,\\
\theta &= \theta_0 + \theta_1 t,\\
\varepsilon' &= \varepsilon'_0 + n't,\\
\pi' &= \pi'_0 + \pi'_1 t.
\end{aligned}$$

Si nous supposons

$$(22)\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = i\varepsilon_0 + i'\pi_0 + i''\theta_0 + i'''\varepsilon'_0 + i^{\text{IV}}\pi'_0 + i^{\text{V}}\theta', \\ b = in + i'\pi_1 + i''\theta_1 + i'''n' + i^{\text{IV}}\pi'_1, \\ \mathrm{N} = \mathrm{A} + bt, \end{cases}$$

A sera fonction des six constantes angulaires, et b sera fonction des autres constantes, γ' étant excepté. En posant de plus N′ pour l'angle $j\varepsilon + j'\pi + j''\theta + j'''\varepsilon' + j^{\text{IV}}\pi' + j^{\text{V}}\theta'$, nous aurons

$$(23)\qquad \begin{cases} x = \Sigma k_i \cos \mathrm{N}_i, & x' = -\Sigma k'_j \sin \mathrm{N}_j, \\ y = \Sigma k_i \sin \mathrm{N}_i, & y' = \Sigma k'_j \cos \mathrm{N}_j, \\ z = \Sigma c_i \sin \mathrm{N}'_i, & z' = \Sigma c'_j \cos \mathrm{N}'_j. \end{cases}$$

Dans ces équations, nous avons mis, pour abréger

$$k' = bk,$$
$$c' = b'e,$$

de sorte que k' et c' sont fonction des mêmes six arbitraires que k et c. Il ne faut pas confondre les indices i et j avec les coefficients de ε : ils ne représentent qu'une série arbitraire de nombres par lesquels nous pouvons distinguer entre les diverses valeurs de k, c, N et N′, qui se trouvent dans les valeurs de x, y, z, x', y', z'.

Les équations (23) donnent sur-le-champ

$$\frac{dx}{da} = \sum \left(\frac{dk_i}{da} \cos \mathrm{N}_i - k_i \frac{d\mathrm{N}_i}{da} \sin \mathrm{N}_i \right),$$
$$\frac{dx'}{de} = \sum \left(-\frac{dk'_j}{de} \sin \mathrm{N}_j - k'_j \frac{d\mathrm{N}_j}{de} \cos \mathrm{N}_j \right),$$
$$\frac{dx}{de} = \sum \left(\frac{dk_i}{de} \cos \mathrm{N}_i - k_i \frac{d\mathrm{N}_i}{de} \sin \mathrm{N}_i \right),$$
$$\frac{dx'}{da} = \sum \left(-\frac{dk_j}{da} \sin \mathrm{N}_j - k'_j \frac{d\mathrm{N}_j}{da} \cos \mathrm{N}_j \right),$$
$$\frac{dy}{da} = \sum \left(\frac{dk_i}{da} \sin \mathrm{N}_i + k_i \frac{d\mathrm{N}_i}{da} \cos \mathrm{N}_i \right),$$
$$\frac{dy'}{de} = \sum \left(\frac{dk'_j}{de} \cos \mathrm{N}_j - k'_j \frac{d\mathrm{N}_j}{de} \sin \mathrm{N}_j \right),$$

$$\frac{dy}{de} = \sum \left(\frac{dk_i}{de} \sin \mathrm{N}_i + k_i \frac{d\mathrm{N}_i}{de} \cos \mathrm{N}_i \right),$$

$$\frac{dy'}{da} = \sum \left(\frac{dk'_j}{da} \cos \mathrm{N}_j - k'_j \frac{d\mathrm{N}_j}{da} \sin \mathrm{N}_j \right),$$

$$\frac{dz}{da} = \sum \left(\frac{dc_i}{da} \sin \mathrm{N}'_i + c_i \frac{d\mathrm{N}'_i}{da} \cos \mathrm{N}'_i \right),$$

$$\frac{dz'}{de} = \sum \left(\frac{dc'_j}{de} \cos \mathrm{N}'_j - c'_j \frac{d\mathrm{N}'_j}{de} \sin \mathrm{N}'_j \right),$$

$$\frac{dz}{de} = \sum \left(\frac{dc_i}{de} \sin \mathrm{N}'_i + c_i \frac{d\mathrm{N}'_i}{de} \cos \mathrm{N}'_i \right),$$

$$\frac{dz'}{da} = \sum \left(\frac{dc'_j}{da} \cos \mathrm{N}'_j - c'_j \frac{d\mathrm{N}'_j}{da} \sin \mathrm{N}'_j \right).$$

En substituant ces valeurs dans la seconde des équations (10), et en posant, pour abréger,

$$(\varphi, \theta) = \frac{d\varphi}{da}\frac{d\theta}{de} - \frac{d\varphi}{de}\frac{d\theta}{da},$$

cette équation nous donne

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} (a, e, x) = {} & \Sigma^2 \{ [k_i, k'_j] + k_i k'_j [\mathrm{N}_i, \mathrm{N}_j] \} \sin(\mathrm{N}_i - \mathrm{N}_j) \\ & + \Sigma^2 \{ k_i [\mathrm{N}_i, k'_j] - k'_j [k_i, \mathrm{N}_j] \} \cos(\mathrm{N}_i - \mathrm{N}_j) \\ & + \tfrac{1}{2} \Sigma^2 \{ [c_i, c'_j] + c_i c'_j [\mathrm{N}'_i, \mathrm{N}'_j] \} \sin(\mathrm{N}'_i - \mathrm{N}'_j) \\ & + \tfrac{1}{2} \Sigma^2 \{ [c_i, c'_j] - c_i c'_j [\mathrm{N}'_i, \mathrm{N}'_j] \} \sin(\mathrm{N}'_i + \mathrm{N}'_j) \\ & + \tfrac{1}{2} \Sigma^2 \{ c_i [\mathrm{N}'_i, c'_j] - c'_j [c_i, \mathrm{N}'_j] \} \cos(\mathrm{N}'_i - \mathrm{N}'_j) \\ & + \tfrac{1}{2} \Sigma^2 \{ c_i [\mathrm{N}'_i, c'_j] + c'_j [c_i, \mathrm{N}'_j] \} \cos(\mathrm{N}'_i + \mathrm{N}'_j). \end{aligned} \right.$$

Nous nous rappellerons que les deux indices i, j ont chacun le même système de valeurs, et que leur combinaison sous le signe Σ^2 indique que chaque valeur de N se combine avec toutes les autres valeurs, en y comprenant elle-même. Pour trouver la fonction que nous cherchons $(a, e, x)_0$, il faut omettre tous les termes périodiques dans (24). En substituant pour N_i et N_j leurs valeurs $\mathrm{A}_i + \mathfrak{b}_i t$ et $\mathrm{A}_j + \mathfrak{b}_j t$, nous voyons que tous les termes seront périodiques, à moins que nous n'ayons, ou

$$\mathfrak{b}_i - \mathfrak{b}_j = 0,$$

ou

$$\mathfrak{b}'_i \pm \mathfrak{b}'_j = 0.$$

Les valeurs de $\mathfrak{b}_i$ et $\mathfrak{b}_j$ peuvent s'écrire, à cause des équations (22),

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_i &= i_1 n + i'_1\pi_1 + i''_1\theta_1 + i'''_1 n' + i^{\text{IV}}_1\pi'_1,\\
\mathfrak{b}_j &= i_2 n + i'_2\pi_1 + i''_2\theta_1 + i'''_2 n' + i^{\text{IV}}_2\pi'_1,\\
\mathfrak{b}'_i &= j_1 n + j'_1\pi_1 + j''_1\theta_1 + j'''_1 n' + j^{\text{IV}}_1\pi'_1,\\
\mathfrak{b}'_j &= j_2 n + j'_2\pi_1 + j''_2\theta_1 + j'''_2 n' + j^{\text{IV}}_2\pi'_1.
\end{aligned}$$

Il faut donc que nous ayons, ou

$$0 = (i_1 - i_2)n + (i'_1 - i'_2)\pi_1 + (i''_1 - i''_2)\theta_1 + (i'''_1 - i'''_2)n' + (i^{\text{IV}}_1 - i^{\text{IV}}_2)\pi'_1,$$

ou

$$0 = (j_1 \pm j_2)n + (j'_1 \pm j'_2)\pi_1 + (j''_1 \pm j''_2)\theta_1 + (j'''_1 \pm j'''_2)n' + (j^{\text{IV}}_1 \pm j^{\text{IV}}_2)\pi'_1;$$

mais n, π_1, θ_1, n', π'_1 étant des quantités incommensurables, on ne peut satisfaire à ces équations à moins qu'on n'ait

$$\begin{aligned}
&i_1 = i, \qquad i'_1 = i'_2, \ldots, \qquad i^{\text{IV}}_1 = i^{\text{IV}}_2,\\
&j_1 = \mp j_2, \quad j'_1 = \mp j'_2, \ldots, \quad j^{\text{IV}}_1 = \mp j^{\text{IV}}_2.
\end{aligned}$$

En satisfaisant à ces équations, l'équation (20) donnerait

$$\begin{aligned}
i^{\text{V}}_1 &= i^{\text{V}}_2,\\
j^{\text{V}}_1 &= \mp j^{\text{V}}_2,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathrm{A}_i = \mathrm{A}_j, \quad \mathrm{N}_i = \mp \mathrm{N}_j.$$

De cela nous ne retiendrons dans l'équation (24) que les termes qui satisfont à la condition

$$i = j.$$

Nous avons donc, en omettant l'indice i,

$$\begin{aligned}
(a, e, x)_0 = {} & \Sigma\{k[\mathrm{N}, k'] - k'[k, \mathrm{N}]\}\\
& + \tfrac{1}{2}\Sigma\{c[\mathrm{N}', c'] - c'[c, \mathrm{N}']\},
\end{aligned}$$

ou, en mettant pour k' sa valeur bk, et b$'c$ pour c',

$$(a, e, x)_0 = \sum\left[\frac{d(\mathrm{b}k^2)}{de}\frac{d\mathrm{N}}{da} - \frac{d(\mathrm{b}k^2)}{da}\frac{d\mathrm{N}}{de}\right] + \tfrac{1}{2}\sum\left[\frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{de}\frac{d\mathrm{N}'}{da} - \frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{da}\frac{d\mathrm{N}'}{de}\right].$$

En vertu des équations (22), nous avons

$$\frac{d\mathrm{N}}{da} = \frac{d\mathrm{A}}{da} + t\frac{d\mathrm{b}}{da},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

En omettant les termes qui contiennent t comme facteur, la valeur de (a, c, x) se réduit à

(25) $$\left\{\begin{aligned}(a, e, x)_0 = & \sum\left[\frac{d\mathrm{A}}{da}\frac{d(\mathrm{b}k^2)}{de} - \frac{d\mathrm{A}}{de}\frac{d(\mathrm{b}k^2)}{da}\right]\\ & + \tfrac{1}{2}\sum\left[\frac{d\mathrm{A}'}{da}\frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{de} - \frac{d\mathrm{A}'}{de}\frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{da}\right],\end{aligned}\right.$$

a et e représentant deux quelconques des douze arbitraires qui entrent dans les valeurs (19) de x, y, z.

Ces arbitraires se divisent en deux classes.

Classe (1) : les six arbitraires

$$a,\ e,\ \gamma,\ a',\ e',\ \gamma',$$

qui se trouvent dans b, k et c, mais pas dans A.

Classe (2) : les six arbitraires

$$\varepsilon_0,\ \pi_0,\ \theta_0,\ \varepsilon'_0,\ \pi'_0,\ \theta'_0,$$

qui se trouvent dans A, A$'$, mais pas dans b, b$'$, k ou c.

Il est évident que, lorsque les arbitraires a, e, dans (25), se trouvent, toutes deux, ou dans la classe (1) ou dans la classe (2), la valeur de $(a, e, x)_0$ s'évanouit. Ces combinaisons sont au nombre de trente. Nous n'avons donc à considérer que les combinaisons dans lesquelles une arbitraire se trouve dans une classe, et l'autre dans l'autre. Supposons

que a est de la première classe, et e de la seconde ; nous avons

$$(a, e, x)_0 = -\sum\left[\frac{dA}{de}\frac{d(\mathrm{b}k^2)}{da} + \frac{1}{2}\frac{dA'}{de}\frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{da}\right].$$

La première des équations (22) nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{d\varepsilon_0} &= i, & \frac{dA'}{d\varepsilon_0} &= j,\\
\frac{dA}{d\pi_0} &= i', & \frac{dA'}{d\pi_0} &= j',\\
&\vdots & &\vdots\\
\frac{dA}{d\theta'} &= i^{\mathrm{v}}, & \frac{dA'}{d\theta'} &= j^{\mathrm{v}}.
\end{aligned}$$

En remplaçant e par les six constantes $\varepsilon_0, \pi_0, \ldots$, nous trouvons donc

$$\begin{aligned}
(a, \varepsilon_0, x) &= -\sum\left[i\frac{d(\mathrm{b}k^2)}{da} + \tfrac{1}{2}j\frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{da}\right]\\
&= -\frac{d}{da}\sum(i\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j\mathrm{b}'c^2),\\
(a, \pi_0, x)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(i'\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j'\mathrm{b}'c^2),\\
(a, \theta_0, x)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(i''\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j''\mathrm{b}'c^2),\\
(a, \varepsilon'_0, x)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(i'''\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j'''\mathrm{b}'c^2),\\
(a, \pi'_0, x)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(i^{\mathrm{iv}}\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j^{\mathrm{iv}}\mathrm{b}'c^2),\\
(a, \theta'_0, x)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(i^{\mathrm{v}}\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j^{\mathrm{v}}\mathrm{b}'c^2).
\end{aligned}$$

Les équations correspondantes en $e, \gamma, a', e', \gamma'$ se forment en remplaçant a par ces lettres.

Les valeurs de (a, e, X) peuvent se former de la même manière à l'aide des expressions pour X, Y, Z. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
(a, \varepsilon_0, X)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(\mathrm{I}\mathrm{B}\mathrm{K}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J}\mathrm{B}'\mathrm{C}^2),\\
(a, \pi_0, X)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(\mathrm{I}'\mathrm{B}\mathrm{K}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J}'\mathrm{B}'\mathrm{C}^2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Maintenant nous voyons, en substituant dans l'équation (11), pour $(a, e, x)_0$ et $(a, e, X)_0$, les valeurs trouvées ci-dessus, que les valeurs des trente-six combinaisons de la forme (a, e) peuvent se former comme il suit.

D'abord nous posons, pour abréger,

$$\mu_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$\mu_2 = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3};$$

puis nous formons les six fonctions $k\varepsilon$, $k\pi$, $k\theta$, $k\varepsilon'$, $k\pi'$, $k\theta'$ des équations suivantes :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
k\varepsilon &= \mu_1 \Sigma(\mathrm{IBK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J\,B'C}^2) + \mu_2 \Sigma(i\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j\mathrm{b'c}^2),\\
k\pi &= \mu_1 \Sigma(\mathrm{I'BK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J'B'C}^2) + \mu_2 \Sigma(i'\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j'\mathrm{b'c}^2),\\
k\theta &= \mu_1 \Sigma(\mathrm{I''BK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J''B'C}^2) + \mu_2 \Sigma(i''\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j''\mathrm{b'c}^2),\\
k\varepsilon' &= \mu_1 \Sigma(\mathrm{I'''BK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J'''B'C}^2) + \mu_2 \Sigma(i'''\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j'''\mathrm{b'c}^2),\\
k\pi' &= \mu_1 \Sigma(\mathrm{I^{IV}BK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J^{IV}B'C}^2) + \mu_2 \Sigma(i^{\mathrm{IV}}\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j^{\mathrm{IV}}\mathrm{b'c}^2),\\
k\theta' &= \mu_1 \Sigma(\mathrm{I^{V}BK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J^{V}B'C}^2) + \mu_2 \Sigma(i^{\mathrm{V}}\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j^{\mathrm{V}}\mathrm{b'c}^2).
\end{aligned}\right.$$

Nous avons alors

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
&(a, \varepsilon_0) = -\frac{dk_\varepsilon}{da}, \quad (e, \varepsilon_0) = -\frac{dk_\varepsilon}{de}, \ldots,\\
&(a, \pi_0) = -\frac{dk_\pi}{da}, \quad (e, \pi_0) = -\frac{dk_\pi}{de}, \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

Nous avons ainsi réduit le problème de la détermination de tous les coefficients (a, a'), qui pouvaient se monter au nombre de deux cent cinquante-trois, à la recherche des six fonctions k_ε, $k_\pi, \ldots$, que nous formons avec facilité, dès que nous avons les coordonnées rectangulaires x, y, z, X, Y, Z développées en la forme déjà donnée.

Si nous substituons les valeurs ci-dessus des coefficients $(a, \varepsilon_0), \ldots$, dans les équations (6), en nous rappelant que tous les coefficients s'évanouissent, à l'exception de ceux ci-dessus, nous aurons les douze

équations différentielles qui suivent pour déterminer les douze arbitraires dont il s'agit :

$$
(28)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{dk_\varepsilon}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{dR}{d\varepsilon_0},\\
&\frac{dk_\pi}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_\pi}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_\pi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_\pi}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_\pi}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_\pi}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{dR}{d\pi_0},\\
&\frac{dk_\theta}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_\theta}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_\theta}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_\theta}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_\theta}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_\theta}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{dR}{d\theta_0},\\
&\frac{dk_{\varepsilon'}}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{dR}{d\varepsilon'_0},\\
&\frac{dk_{\pi'}}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{dR}{d\pi'_0},\\
&\frac{dk_{\theta'}}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{dR}{d\theta'},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{da}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{da}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{da}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{da}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{da}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{da}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{dR}{da},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{de}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{de}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{de}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{de}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{de}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{de}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{dR}{de},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{d\gamma}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{d\gamma}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{d\gamma}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{d\gamma}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{d\gamma}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{dR}{d\gamma},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{da'}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{da'}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{da'}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{da'}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{da'}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{da'}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{dR}{da'},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{de'}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{de'}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{de'}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{de'}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{de'}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{dR}{de'},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{d\gamma'}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{d\gamma'}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{d\gamma'}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma'}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{d\gamma'}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{d\gamma'}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{dR}{d\gamma'}.
\end{aligned}
\right.
$$

L'intégration de ces équations donnera les valeurs des éléments a, e, γ, a', e', γ', ε_0, π_0, θ_0, ε'_0, π'_0, θ'_0 en fonction du temps, lesquelles, étant substituées dans les équations (19), donneront les valeurs des coordonnées de la Lune qui satisferont aux équations (3).

§ VI.

Réduction des équations précédentes aux formes canoniques.

Les six quantités k_ε, k_θ, ... étant chacune fonction des éléments a, e, γ, a', e', γ', les six premières des équations précédentes donnent

immédiatement

$$\frac{dk_\varepsilon}{dt} = \frac{dR}{d\varepsilon_0}, \quad \frac{dk_\pi}{dt} = \frac{dR}{d\pi_0}, \ldots$$

Nous pouvons, de plus, déterminer les valeurs des éléments a, e, γ, a', e', γ', en fonction des quantités k_ε, k_π, k_θ, $k_{\varepsilon'}$, $k_{\pi'}$, $k_{\theta'}$, et ainsi, dans les expressions (28) et dans la valeur de R, remplacer celles-là par celles-ci. Si donc nous multiplions la septième de ces équations par $\frac{da}{dk_\varepsilon}$, la huitième par $\frac{de}{dk_\varepsilon}, \ldots$, la douzième étant multipliée par $\frac{d\gamma'}{dk_\varepsilon}$, et, si nous ajoutons les produits ainsi obtenus, en remarquant que la théorie de la différentiation des fonctions inverses nous donne

$$\begin{gathered}
\frac{dk_\varepsilon}{da}\frac{da}{dk_\varepsilon} + \frac{dk_\varepsilon}{de}\frac{de}{dk_\varepsilon} + \frac{dk_\varepsilon}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dk_\varepsilon} + \frac{dk_\varepsilon}{da'}\frac{da'}{dk_\varepsilon} + \frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{de'}{dk_\varepsilon} + \frac{dk_\varepsilon}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dk_\varepsilon} = 1, \\
\frac{dk_\pi}{da}\frac{da}{dk_\varepsilon} + \frac{dk_\pi}{de}\frac{de}{dk_\varepsilon} + \frac{dk_\pi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dk_\varepsilon} + \frac{dk_\pi}{da'}\frac{da'}{dk_\varepsilon} + \frac{dk_\pi}{de'}\frac{de'}{dk_\varepsilon} + \frac{dk_\pi}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dk_\varepsilon} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{gathered}$$

nous trouvons

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = -\frac{dR}{dk_\varepsilon}.$$

De même nous avons

$$\frac{d\pi_0}{dt} = -\frac{dR}{dk_\pi}, \quad \frac{d\theta_0}{dt} = -\frac{dR}{dk_\theta}, \ldots$$

Les équations (28) peuvent donc se réduire à la forme canonique

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dk_\varepsilon}{dt} = \frac{dR}{d\varepsilon_0}, && \frac{d\varepsilon_0}{dt} = -\frac{dR}{dk_\varepsilon}; \\
&\frac{dk_\pi}{dt} = \frac{dR}{d\pi_0}, && \frac{d\pi_0}{dt} = -\frac{dR}{dk_\pi}; \\
&\frac{dk_\theta}{dt} = \frac{dR}{d\theta_0}, && \frac{d\theta_0}{dt} = -\frac{dR}{dk_\theta}; \\
&\frac{dk_{\varepsilon'}}{dt} = \frac{dR}{d\varepsilon'_0}, && \frac{d\varepsilon'_0}{dt} = -\frac{dR}{dk_{\varepsilon'}}; \\
&\frac{dk_{\pi'}}{dt} = \frac{dR}{d\pi'_0}, && \frac{d\pi'_0}{dt} = -\frac{dR}{dk_{\pi'}}; \\
&\frac{dk_{\theta'}}{dt} = \frac{dR}{d\theta'_0}, && \frac{d\theta'_0}{dt} = -\frac{dR}{dk_{\theta'}}.
\end{aligned}\right.$$

En tirant ces équations des expressions (19), il n'était pas nécessaire de considérer la signification spéciale que nous avons donnée aux éléments ε, π, θ, ε', π', θ'. Par conséquent, nous pouvons supposer ces éléments remplacés par d'autres sans altérer notre analyse. Par exemple, nous pouvons substituer un nombre quelconque des éléments suivants pour un nombre égal de ceux que nous avons choisis, c'est-à-dire :

Les anomalies moyennes du Soleil et de la Lune;

Leurs distances moyennes du nœud de l'un ou de l'autre;

Les distances de leurs périgées de l'un ou l'autre nœud;

Ou, enfin, toute fonction linéaire de ces éléments.

Comme toute substitution de cette sorte conduit à des formes similaires à (29), il s'ensuit qu'il y a une infinité de formes canoniques comme celle-ci, chaque système de variables ayant son propre système d'équations canoniques. En effet, c'est ce que nous pouvons conclure des équations (29) elles-mêmes. Car déterminons les six éléments l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 à l'aide des équations

$$(30)\quad \begin{cases} p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_4 l_4 + p_5 l_5 + p_6 l_6 = \varepsilon_0, \\ q_1 l_1 + q_2 l_2 + q_3 l_3 + q_4 l_4 + q_5 l_5 + q_6 l_6 = \pi_0, \\ r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + r_4 l_4 + r_5 l_5 + r_6 l_6 = \theta_0, \\ s_1 l_1 + s_2 l_2 + s_3 l_3 + s_4 l_4 + s_5 l_5 + s_6 l_6 = \varepsilon'_0, \\ t_1 l_1 + t_2 l_2 + t_3 l_3 + t_4 l_4 + t_5 l_5 + t_6 l_6 = \pi'_0, \\ u_1 l_1 + u_2 l_2 + u_3 l_3 + u_4 l_4 + u_5 l_5 + u_6 l_6 = \theta'_0, \end{cases}$$

p, q, r, ... étant des constantes quelconques dont le déterminant ne s'évanouit pas. Posons, de plus,

$$(31)\quad \begin{cases} c_1 = p_1 k_\varepsilon + q_1 k_\pi + r_1 k_\theta + s_1 k_{\varepsilon'} + t_1 k_{\pi'} + u_1 k_{\theta'}, \\ c_2 = p_2 k_\varepsilon + q_2 k_\pi + r_2 k_\theta + s_2 k_{\varepsilon'} + t_2 k_{\pi'} + u_2 k_{\theta'}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ c_6 = p_6 k_\varepsilon + q_6 k_\pi + r_6 k_\theta + s_6 k_{\varepsilon'} + t_6 k_{\pi'} + u_6 k_{\theta'}. \end{cases}$$

Multiplions la première des équations (29), à gauche, par p_1, la deuxième par q_1, la troisième par r_1, et ainsi de suite, et ajoutons-les :

nous aurons

$$\frac{dc_1}{dt} = p_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon_0} + q_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\pi_0} + r_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\theta_0} + s_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon'_0} + t_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\pi'_0} + u_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\theta'_0} = \frac{d\mathrm{R}}{dl_0}.$$

De même, nous aurons

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl_2}, \quad \frac{dc_3}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl_3}, \ldots.$$

Pour obtenir les valeurs de $\frac{dl}{dt}$, supposons que nous ayons tiré des équations (30) les valeurs de l_1, l_2,... en fonction de ε_0, π_0,.... En nous rappelant l'égalité des deux déterminants quelconques dont les lignes horizontales de l'une sont identiques avec les lignes verticales de l'autre, il est facile de voir que si nous mettons les valeurs de l_1, l_2,... ainsi obtenues, sous la forme

$$\begin{aligned}
l_1 &= \mathrm{P}_1 \varepsilon_0 + \mathrm{Q}_1 \pi_0 + \mathrm{R}_1 \theta_0 + \mathrm{S}_1 \varepsilon'_0 + \mathrm{T}_1 \pi'_0 + \mathrm{U}_1 \theta'_0, \\
l_2 &= \mathrm{P}_2 \varepsilon_0 + \mathrm{Q}_2 \pi_0 + \mathrm{R}_2 \theta_0 + \mathrm{S}_2 \varepsilon'_0 + \mathrm{T}_2 \pi'_0 + \mathrm{U}_2 \theta'_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
l_6 &= \mathrm{P}_6 \varepsilon_0 + \mathrm{Q}_6 \pi_0 + \mathrm{R}_6 \theta_0 + \mathrm{S}_6 \varepsilon'_0 + \mathrm{T}_6 \pi'_0 + \mathrm{U}_6 \theta'_0;
\end{aligned}$$

celles de k_ε, k_π,..., obtenues de la même manière des équations (31), seront

$$\begin{aligned}
k_\varepsilon &= \mathrm{P}_1 c_1 + \mathrm{P}_2 c_2 + \mathrm{P}_3 c_3 + \mathrm{P}_4 c_4 + \mathrm{P}_5 c_5 + \mathrm{P}_6 c_6, \\
k_\pi &= \mathrm{Q}_1 c_1 + \mathrm{Q}_2 c_2 + \mathrm{Q}_3 c_3 + \mathrm{Q}_4 c_4 + \mathrm{Q}_5 c_5 + \mathrm{Q}_6 c_6, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
k_{\theta'} &= \mathrm{U}_1 c_1 + \mathrm{U}_2 c_2 + \mathrm{U}_3 c_3 + \mathrm{U}_4 c_4 + \mathrm{U}_5 c_5 + \mathrm{U}_6 c_6.
\end{aligned}$$

Donc, nous avons, en opérant comme précédemment,

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{dc_1}, \quad \frac{dl_2}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{dc_2}, \ldots$$

Nous pouvons donc remplacer les équations (29) par celles qui

suivent

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{dc_1}{dt} = \dfrac{dR}{dl_1}, & \dfrac{dl_1}{dt} = -\dfrac{dR}{dc_1}, \\ \dfrac{dc_2}{dt} = \dfrac{dR}{dl_2}, & \dfrac{dl_2}{dt} = -\dfrac{dR}{dc_2}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots; \\ \dfrac{dc_6}{dt} = \dfrac{dR}{dl_6}, & \dfrac{dl_6}{dt} = -\dfrac{dR}{dc_6}. \end{cases}$$

Pour plus de clarté, récapitulons les résultats auxquels nous sommes arrivé. Nous supposons qu'on soit parvenu à exprimer les cordonnées x, y, z, X, Y, Z sous la forme

$$\begin{aligned} x &= \Sigma k \cos(\alpha + bt), \\ y &= \Sigma k \sin(\alpha + bt), \\ z &= \Sigma c \sin(\alpha' + b't), \\ X &= \Sigma K \cos(A + Bt), \\ Y &= \Sigma K \sin(A + Bt), \\ Z &= \Sigma C \sin(A' + B't), \end{aligned}$$

où k, c, b, b', K, C, B, B' sont des fonctions des constantes arbitraires a, e, γ, a', e', γ', et α, α', A, A' sont des fonctions linéaires à coefficients constants et entiers des six arbitraires l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, desquelles dépendent les positions moyennes du Soleil et de la Lune, de leurs nœnds et de leurs périgées à l'origine de temps. Nous avons, pour chaque coordonnée, une série infinie de termes, lesdites fonctions étant différentes pour chaque terme. Alors :

1° Pour chaque terme de x, formons le produit

$$\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} bk^2,$$

que nous représenterons, pour abréger, par k_1. Pour chaque terme de z, formons le produit

$$\frac{1}{2} \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} b'c^2 = c_1.$$

Pour chaque terme de X, formons le produit

$$\frac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}\,BK^2 = K_1.$$

Pour chaque terme de Z, formons le produit

$$\frac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}\,B'C^2 = C_1.$$

2° Multiplions chaque valeur de k_1 par le coefficient correspondant de l_1 dans l'expression qui donne α en fonction de $l_1, l_2, \ldots$. Multiplions chaque valeur de c_1 par le coefficient de l_1 dans α'. Multiplions chaque K_1 par le coefficient de l_1 dans A. Multiplions chaque C_1 par le coefficient de l_1 dans A'. Ajoutons tous les produits ainsi formés, en appelant leur somme c_1. De même, des coefficients de l_2 forment la valeur de c_2, et ainsi de suite pour les six éléments.

3° Dans l'expression de R, remplaçons les six éléments a, e, γ, a', e', γ' par les six nouveaux éléments c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6. Donc, les valeurs de celles-ci sont données par les équations

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{dR}{dl_i}, \quad \frac{dl_i}{dt} = -\frac{dR}{dc_i}.$$

Les valeurs des douze éléments c_1, c_2,..., l_1, l_2,... ayant été déterminées à l'aide de ces équations, nous pouvons en déduire les valeurs des éléments a, e, γ,..., qu'il faut substituer dans les expressions (12), pour avoir les coordonnées de la Lune. Mais, si nous opérons ainsi sans rien changer, nous nous trouverons embarrassés avec des termes qui contiennent le temps comme facteur hors des signes sin et cos. En effet, chaque terme de R étant de la forme

$$h\cos(A + bt),$$

b étant fonction des éléments c_1, c_2, c_3, .., il s'ensuit que, en différentiant par rapport à c_i, chaque terme de R donnera, dans la valeur de $\frac{dl_i}{dt}$, le terme

$$ht\frac{db}{dc}\sin(A + bt).$$

De plus, chaque terme de v, r, β, ou de x, y, z étant de la forme

$$k \frac{\sin}{\cos}(\mathrm{A} + bt),$$

il s'ensuit que, lorsque nous substituerons pour b sa valeur en une série de termes de cette forme; cette valeur, étant multipliée par t, produira des termes de la même forme que ce que nous avons signalé. Nous allons montrer que ces deux sortes de termes se détruisent mutuellement.

Pour cela, nous nous rappellerons encore une fois la forme générale à laquelle les expressions pour les coordonnées de la Lune peuvent se réduire, c'est-à-dire une série infinie dont chaque terme est de la forme

$$(33) \qquad k \frac{\sin}{\cos}(i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + i_3 \lambda_3 + i_4 \lambda_4 + i_5 \lambda_5 + i_6 \lambda_6),$$

chaque λ étant de la forme

$$(34) \qquad \lambda_i = l_i + b_i t,$$

et chaque b, ainsi que k, étant des fonctions des six arbitraires c_1, $c_2, \ldots, c_6$. Si l'on différentie l'expression (34) de λ_i, en y regardant l_i et b_i comme variables, on a

$$(35) \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{dl_i}{dt} + t \frac{db_i}{dt} + b_i,$$

et il faut montrer que le terme $t \frac{db_i}{dt}$ est détruit par les termes que nous venons de signaler dans $\frac{dl_i}{dt}$. Chaque terme de R est de la forme

$$\mathrm{R} = h \cos \mathrm{N},$$

où

$$\mathrm{N} = i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + i_3 \lambda_3 + i_4 \lambda_4 + i_5 \lambda_5 + i_6 \lambda_6 + mt,$$

m étant fonction des éléments de la planète, qui ne contiennent pas les quantités que nous cherchons; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ étant des fonctions de $c_1, c_2, \ldots$,

la valeur de $\frac{dR}{dc_i}$ contiendra les termes

$$\frac{dR}{d\lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dc_i}+\frac{dR}{d\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dc_i}+\ldots+\frac{dR}{d\lambda_6}\frac{d\lambda_6}{dc_i}.$$

Mais

$$\frac{dR}{d\lambda_1}=-i_1 h\sin N,$$
$$\frac{dR}{d\lambda_2}=-i_2 h\sin N,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dR}{d\lambda_6}=-i_6 h\sin N;$$

et

$$\frac{d\lambda_1}{dc_i}=t\frac{db_1}{dc_i},$$
$$\frac{d\lambda_2}{dc_i}=t\frac{db_2}{dc_i},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d\lambda_6}{dc_i}+t\frac{db_6}{dc_i}.$$

Par conséquent, la valeur de $-\frac{dR}{dc_i}$, c'est-à-dire la valeur de $\frac{dl_i}{dt}$ contiendra le terme

$$\frac{dl_i}{dt}=\left(i_1\frac{db_1}{dc_i}+i_2\frac{db_2}{dc_i}+\ldots+i_6\frac{db_6}{dc_i}\right)th\sin N;$$

b_i étant fonction de $c_1, c_2, \ldots$, nous avons

$$t\frac{db_i}{dt}=t\left(\frac{db_i}{dc_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{db_i}{dc_2}\frac{dc_2}{dt}+\ldots+\frac{db_i}{dc_6}\frac{dc_6}{dt}\right).$$

Mais, pour chaque c,

$$\frac{dc_j}{dt}=\frac{dR}{dl_j}=\frac{dR}{d\lambda_j}=-i_j h\sin N:$$

par conséquent

$$t\frac{db_i}{dt}=\left(i_1\frac{db_i}{dc_1}+i_2\frac{db_i}{dc_2}+\ldots+i_6\frac{db_i}{dc_6}\right)th\sin N.$$

Les termes de $\frac{d\lambda_i}{dt}$ qui sont multipliés par le temps t hors du signe sin ou cos, sont donc

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{dt} = \Big[i_1 \left(\frac{db_1}{dc_i} - \frac{db_i}{dc_1} \right) \\ + i_2 \left(\frac{db_2}{dc_i} - \frac{db_i}{dc_2} \right) + \ldots + i_6 \left(\frac{db_6}{dc_i} - \frac{db_i}{dc_6} \right) \Big] ht \sin N. \end{aligned} \right.$$

Maintenant, nous allons montrer que, pour toute combinaison des indices i et j, nous avons

$$\frac{db_i}{dc_j} - \frac{db_j}{dc_i} = 0.$$

Ce théorème provient de cela, que chaque l_i se lie invariablement avec sa propre $b_i t$, et que t n'entre point dans les valeurs des coordonnées qu'autant que son produit par b_i se joint à sa correspondante l_i pour former la valeur de λ_i, dont les coordonnées sont des fonctions. Abordons notre problème par une autre voie, et considérons que, au lieu de former les équations (2), qui donnent les coordonnées en fonction des constantes arbitraires et du temps, nous ayons formé les dix-huit premières intégrales qui donnent les dix-huit constantes arbitraires en fonction du temps, des coordonnées des trois corps et de leurs dérivées premières par rapport au temps. On sait que les équations (6) pourraient alors se remplacer par celles qui suivent. Posons

$$[a, a'] = \sum \frac{1}{m_i} \left(\frac{da}{d\xi_i} \frac{da'}{d\xi'_i} + \frac{da}{d\eta_i} \frac{da'}{d\eta'_i} + \frac{da}{d\zeta_i} \frac{da'}{d\zeta'_i} - \frac{da}{d\xi'_i} \frac{da'}{d\xi_i} - \frac{da}{d\eta'_i} \frac{da'}{d\eta_i} - \frac{da}{d\zeta'_i} \frac{da'}{d\zeta_i} \right).$$

Nous avons alors, au lieu des équations (6),

$$\frac{da_i}{dt} = [a_1, a_i] \frac{dR}{da_1} + [a_2, a_i] \frac{dR}{da_2} + [a_3, a_i] \frac{dR}{da_3} + \ldots$$

En opérant ainsi, il faudrait arriver au même résultat que celui auquel nous sommes arrivé actuellement, de sorte qu'en choisissant pour constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_6, l_1, l_2, \ldots, l_6$, nous parvien-

drions aux équations (32). Par conséquent, nous avons pour toutes les combinaisons de ces douze éléments

$$[l_i, c_i] = 1,$$

tandis que toutes les autres combinaisons s'évanouissent identiquement.

Comme nous avons

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \ldots = f(c_1, c_2, \ldots, c_6, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6),$$

il s'ensuit qu'en formant les intégrales premières dont il s'agit, en tirant les valeurs des constantes arbitraires des équations (2), ces intégrales seraient de la forme

$$\begin{array}{ll} c_1 = \varphi_1, & l_1 = \psi_1 - b_1 t, \\ c_2 = \varphi_2, & l_2 = \psi_2 - b_2 t, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ c_6 = \varphi_6, & l_6 = \psi_6 - b_6 t, \end{array}$$

φ et ψ étant des fonctions des coordonnées qui ne contiennent pas le temps. Nous tirons de ces équations

$$[l_i, c_j] = [\psi_i, \varphi_j] - t[b_i, \varphi_j].$$

Nous avons vu que, pour toute valeur de i différente de j, cette expression s'évanouit, tandis que lorsque $j = i$, elle se réduit à l'unité. C'est-à-dire

(37) $$[\psi_i, \varphi_j] = 0,$$

à moins que nous n'ayons $j = i$, auquel cas

$$[\psi_i, \varphi_i] = 1.$$

Considérons maintenant la combinaison $[l_i, l_j]$, qui, comme on sait, s'évanouit pour toute valeur de i et j. Nous avons

$$[l_i, l_j] = [\psi_i, \psi_j] - t\{[b_i, \psi_j] - [b_j, \psi_i]\} + t^2[b_i, b_j]$$

Cette expression étant identiquement zéro, il faut que le coefficient de chaque puissance de t s'évanouisse; par conséquent

$$(38)\qquad [b_i, \psi_j] - [b_j, \psi_i] = 0.$$

Mais b_i, b_j étant chacun fonction de $c_1, c_2, \ldots, c_6$, nous avons

$$[b_i, \psi_j] = [\varphi_1, \psi_j]\frac{db_i}{dc_1} + [\varphi_2, \psi_j]\frac{db_i}{dc_2} + \ldots + [\varphi_6, \psi_j]\frac{db_i}{dc_6},$$

$$[b_j, \psi_i] = [\varphi_1, \psi_i]\frac{db_j}{dc_1} + [\varphi_2, \psi_i]\frac{db_j}{dc_2} + \ldots + [\varphi_6, \psi_i]\frac{db_j}{dc_6}.$$

En ayant égard à (37), et en se rappelant que $[\varphi_i, \psi_j] = -[\varphi_j, \psi_i]$, ces équations se réduisent à

$$[b_i, \psi_j] = -\frac{db_i}{dc_j},$$

$$[b_j, \psi_i] = -\frac{db_j}{dc_i}.$$

Par conséquent (38) donne

$$(39)\qquad \frac{db_j}{dc_i} - \frac{db_i}{dc_j} = 0.$$

C. Q. F. D.

Il s'ensuit qu'en formant la dérivée $\frac{dR}{dc_i}$ pour obtenir la valeur $\frac{dl_i}{dt}$, que nous devons substituer dans (35), nous pouvons supposer b_1, $b_2, \ldots, b_6$ constants, en ne faisant varier que h, pourvu que, dans les expressions pour les coordonnées, nous remplacions l'angle variable $A + bt$ par $A + \int b\,dt$, ou pourvu que nous posions

$$\lambda_i = l_i + \int b_i\,dt.$$

Ce résultat peut s'exprimer sous la forme élégante que M. Delaunay a adoptée dans sa *Théorie du Mouvement de la Lune*. Si nous prenons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ pour variables au lieu de $l_1, l_2, \ldots, l_6$, les équations se réduisent à

$$(40)\qquad \frac{dc_i}{dt} = \frac{dR}{d\lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{dR}{dc_i} + b_i.$$

Les équations (39) montrent qu'il y a une fonction de $c_1, c_2, \ldots c_6$ dont l'expression différentielle

$$b_1\,dc_1 + b_2\,dc_2 + \ldots + b_i\,dc_i$$

est la différentielle exacte. Soit Θ cette fonction, nous avons

$$b_i = \frac{d\Theta}{dc_i}.$$

Si nous substituons cette valeur de b_i dans les équations ci-dessus, et si nous posons

$$R' = R - \Theta,$$

nous aurons, en faisant attention à ce que Θ ne contient pas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{dR'}{d\lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{dR'}{dc_i}.$$

Telles sont les équations les plus simples et les plus générales pour les variations des éléments du Soleil et de la Lune, qui sont dues à la force perturbatrice d'une planète. Toutefois R' ne s'évanouit pas avec la force perturbatrice, mais se réduit à la fonction $-\Theta$, qui est fonction des six éléments $c_1, c_2, \ldots, c_6$.

Nous nous souvenons de ce que nous pouvons choisir pour les variables $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ des combinaisons linéaires quelconques des longitudes moyennes du Soleil et de la Lune, des longitudes de leurs périgées, et des longitudes de leurs nœuds, et que chaque combinaison, ainsi choisie, a son propre système de valeurs de $c_1, c_2, \ldots, c_6$. Ayant conclu les valeurs de ces douze variables en fonction des constantes arbitraires et du temps, nous tirerons les valeurs de a, e, γ, a', e', γ', ε, π, θ, ε', π', θ', qu'il faut substituer dans les expressions des coordonnées du Soleil et de la Lune.

§ VII.

Nous nous proposons, avant d'aller plus loin, d'éclaircir ce qui précède, en formant les fonctions dont il s'agit avec une approximation suffisante pour le premier calcul des inégalités dont il s'agit. Nous calculons les fonctions k_ε, k_π,... jusqu'au terme du quatrième ordre en e, γ, m, e', γ', ce qui équivaut à tenir compte de tous les termes de l'ordre de la force perturbatrice de la planète multipliée par le carré de la force perturbatrice du Soleil. Nous nous abstenons de la présentation des détails du calcul par lequel, des valeurs des coordonnées polaires de la Lune, données par M. Delaunay, nous avons déduit celles des coordonnées rectangulaires x, y, z. Nous remarquons seulement que, dans ce calcul, il ne faut pousser l'approximation du coefficient de chaque terme qu'autant qu'il est nécessaire pour donner le carré de ce terme exact aux quantités du quatrième ordre.

Les valeurs actuelles des expressions (19) peuvent se conclure du tableau suivant, où se trouve, pour chaque système de valeurs de i, i', i'', i''', i^{IV}, i^{V}, la valeur correspondante de k et de b, et pour chaque système de valeurs de j, j',... la valeur correspondante de c et de b'. De ces valeurs, nous déduisons sur-le-champ les valeurs de bk^2 et de $\frac{1}{2}b'c^2$, qui se trouvent à droite. De ces expressions nous formons les termes de k_ε qui dépendent des éléments de la Lune par le procédé du § V, qui est assez simple.

i	i'	i''	i'''	i^{iv}	i^{v}	$k = a\varkappa$	$b = n\varkappa$	$bk^2 = a^2 n\varkappa$
1	0	0	0	0	0	$1 - \gamma^2 - \gamma'^2 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{64}e^4$	1	$1 - 2\gamma^2 - 2\gamma'^2 - e^2 + \frac{7}{32}e^4$
						$+ \gamma^2\gamma'^2 + \frac{1}{2}e^2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2\gamma'^2$		$+ 4\gamma^2\gamma'^2 + \gamma^4 + \gamma'^4 + 2e^2\gamma^2 + 2e^2\gamma'^2$
						$+ \left(-\frac{1}{6} - \frac{931}{384}e^2 - \frac{5}{2}e'^2\right.$		$+ \left(-\frac{1}{3} - \frac{899}{192}e^2 - 5e'^2\right.$
						$\left. + \frac{5}{192}\gamma^2 + \frac{1}{6}\gamma'^2\right) m^2$		$\left. + \frac{37}{96}\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma'^2\right) m^2$
						$+ \frac{1559}{2304}m^4$		$+ \frac{1591}{1152}m^4$
2	−1	0	0	0	0	$+ \frac{1}{2}e - \frac{3}{8}e^3 - \frac{1}{2}e\gamma^2 - \frac{1}{2}e\gamma'^2$	$2 - \frac{3}{4}m^2$	$\frac{1}{2}e^2 - e^2\gamma^2 - e^2\gamma'^2 - \frac{3}{4}e^4$
						$+ \frac{7}{24}em^2$		$+ \frac{19}{48}e^2m^2$
0	1	0	0	0	0	$- \frac{3}{2}e + \frac{3}{2}e\gamma^2 + \frac{3}{2}e\gamma'^2 + \frac{5}{8}em^2$	$\frac{3}{4}m^2$	$\frac{27}{16}e^2m^2$
3	−2	0	0	0	0	$+ \frac{3}{8}e^2$	3	$\frac{27}{64}e^4$
−1	2	0	0	0	0	$+ \frac{1}{8}e^2$	−1	$- \frac{1}{64}e^4$
1	0	0	1	−1	0	$- \frac{3}{2}e'm$	1	$\frac{9}{4}e'^2m^2$
1	0	0	−1	1	0	$+ \frac{7}{2}e'm$	1	$\frac{9}{4}e'^2m^2$
−1	0	2	0	0	0	$+ \gamma^2$	−1	$- \gamma^4$
3	0	0	−2	0	0	$+ \frac{3}{16}m^2$	3	$\frac{27}{256}m^4$
−1	0	0	2	0	0	$- \frac{19}{16}m^2$	−1	$- \frac{361}{256}m^4$
2	1	0	−2	0	0	$+ \frac{15}{16}em$	2	$\frac{225}{128}e^2m^2$
0	−1	0	2	0	0	$- \frac{45}{16}em$	0	0
−1	0	0	0	0	2	$\gamma'^2 - \gamma^2\gamma'^2 - \frac{1}{2}e^2\gamma'^2 - \frac{1}{6}\gamma'^2m^2$	−1	$- \gamma'^4$
−2	1	0	0	0	2	$+ \frac{1}{2}e\gamma'^2$	−2	0
0	−1	0	0	0	2	$- \frac{3}{2}e\gamma'^2$	0	0
1	0	−1	0	0	1	$- 2\gamma\gamma'$	1	$4\gamma^2\gamma'^2$
−1	0	1	0	0	1	$+ 2\gamma\gamma'$	−1	$4\gamma^2\gamma'^2$

j	j'	j''	j'''	j^{iv}	j^{v}	$c = a\varkappa$	$b' = n\varkappa$	$\frac{1}{2} b'c^2 = a^2 n\varkappa$
1	0	−1	0	0	0	$+2\gamma - e^2\gamma - \gamma^3 - 4\gamma\gamma'^2 - \frac{1}{3}\gamma m^2$	1	$2\gamma^2 - 2e^2\gamma^2 - 2\gamma^4 - 8\gamma^2\gamma'^2 + \frac{5}{6}\gamma^2 m^2$
2	−1	−1	0	0	0	$+e\gamma$	2	$4e^2\gamma^2$
0	1	−1	0	0	0	$-3e\gamma$	0	0
1	0	1	−2	0	0	$+\frac{3}{4}\gamma m$	1	$\frac{9}{32}\gamma^2 m^2$
1	0	0	0	0	−1	$-2\gamma' - 2\gamma^2\gamma' - e^2\gamma' - \gamma'^3 - \frac{1}{3}\gamma' m^2$	1	$2\gamma'^2 - 2e^2\gamma'^2 - 2\gamma'^4 - 4\gamma^2\gamma'^2 - \frac{2}{3} m^2\gamma'^2$
2	−1	0	0	0	−1	$+e\gamma'$	2	$e^2\gamma'^2$
0	1	0	0	0	−1	$-3e\gamma'$	0	0

Les parties elliptiques de k_ε, k_π,..., qui dépendent des éléments du Soleil, peuvent se former de celles qui dépendent de la Lune, en omettant tous les termes qui sont multipliés par m, et en accentuant les autres termes. Pour exemple, formons k_ε; nous multiplions chaque valeur de bk^2 et de $\frac{1}{2}b'c^2$ par la valeur correspondante de i, et nous ajoutons tous les produits ainsi obtenus. Alors, nous multiplions la somme par $\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}$. Nous trouvons ainsi

$$\frac{m_2 m_3 a^2 n}{m_2 + m_3}\left[1 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{8}e'^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}\gamma^2\right)m^2 + \frac{895}{288}m^4\right].$$

Mais puisque

$$a^3 n^2 = m_2 + m_3,$$

le coefficient de l'expression précédente se réduit à

$$\frac{m_2 m_3}{an}.$$

Pour le Soleil, l'expression correspondante est

$$\frac{m_1(m_2 + m_3)}{a'n'}.$$

Les valeurs complètes de k_ε, k_π,... auxquelles nous sommes con-

duits sont

$$
(41)\quad \left\{
\begin{aligned}
k_\varepsilon &= \frac{m_2 m_3}{an}\left[1 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{8}e^2 - \frac{1}{2}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^2\right)m^2 + \frac{895}{288}m^4\right],\\
k_\pi &= \frac{m_2 m_3}{an}\left(-\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1171}{384}e^2 m^2\right),\\
k_\theta &= \frac{m_2 m_3}{an}\left(-2\gamma^2 + e^2\gamma^2 - \frac{53}{96}\gamma^2 m^2\right);\\
k_{\varepsilon'} &= \frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'} - \frac{m_2 m_3}{an}\left[\left(\frac{225}{64}e^2 + \frac{9}{10}\gamma^2\right)m^2 - \frac{97}{32}m^4\right],\\
k_{\pi'} &= -\frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}\left(\frac{1}{2}e'^2 + \frac{1}{8}e'^4\right),\\
k_{\theta'} &= \frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}(-2\gamma'^2 + e'^2\gamma'^2)\\
&\quad + \frac{m_2 m_3}{an}\left(-2\gamma'^2 + 4\gamma^2\gamma'^2 + e^2\gamma'^2 + \frac{2}{3}m^2\gamma'^2\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Nous voyons que les termes de $k_{\varepsilon'}$ qui contiennent les éléments du Soleil sont plus petits que ceux qui contiennent les éléments de la Lune, dans le rapport approximatif $\frac{m_1 a n^5}{3 m_3 a' n'^5}$, c'est-à-dire environ l'unité divisée par 10 000 000 000. Nous voyons aussi que $k_{\pi'}$ ne contient aucun des éléments de la Lune dans les limites d'approximation auxquelles nous nous sommes bornés, tandis que, dans la valeur de $k_{\theta'}$, les termes dont il s'agit sont moindres que les autres dans le rapport approximatif 1 : 1 000 000. Ces termes sont, en effet, du même ordre de grandeur que les perturbations du mouvement du centre de gravité de la Terre et de la Lune qui sont dues aux dimensions du système, et que les géomètres ont trouvées insensibles. Par conséquent, nous pouvons les négliger dans l'approximation actuelle. Nous avons donc, au lieu des quatrième, cinquième et sixième des équations (28)

$$
(42)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dk_{\varepsilon'}}{dt} &= \frac{dk_{\varepsilon'}}{da'}\frac{da'}{dt} + \frac{dk_{\varepsilon'}}{de'}\frac{de'}{dt} + \frac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt} = \frac{dR}{d\varepsilon'},\\
\frac{dk_{\pi'}}{dt} &= \frac{dk_{\pi'}}{da'}\frac{da'}{dt} + \frac{dk_{\pi'}}{de'}\frac{de'}{dt} + \frac{dk_{\pi'}}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt} = \frac{dR}{d\pi'},\\
\frac{dk_{\theta'}}{dt} &= \frac{dk_{\theta'}}{da'}\frac{da'}{dt} + \frac{dk_{\theta'}}{de'}\frac{de'}{dt} + \frac{dk_{\theta'}}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt} = \frac{dR}{d\theta'}.
\end{aligned}
\right.
$$

De ces équations nous pouvons tirer les valeurs de $\frac{da'}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$ et $\frac{d\gamma'}{dt}$,

pour les substituer dans les trois premières des équations (28). Par transposition de certains termes, celles-ci deviennent, en omettant les termes que nous avons trouvés insensibles,

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{dk_\varepsilon}{da}\dfrac{da}{dt}+\dfrac{dk_\varepsilon}{de}\dfrac{de}{dt}+\dfrac{dk_\varepsilon}{d\gamma}\dfrac{d\gamma}{dt}=\dfrac{dR}{d\varepsilon}-\dfrac{dk_\varepsilon}{da'}\dfrac{da'}{dt}-\dfrac{dk_\varepsilon}{de'}\dfrac{de'}{dt},\\ \dfrac{dk_\varpi}{da}\dfrac{da}{dt}+\dfrac{dk_\varpi}{de}\dfrac{de}{dt}+\dfrac{dk_\varpi}{d\gamma}\dfrac{d\gamma}{dt}=\dfrac{dR}{d\varpi}-\dfrac{dk_\varpi}{da'}\dfrac{da'}{dt},\\ \dfrac{dk_\theta}{da}\dfrac{da}{dt}+\dfrac{dk_\theta}{de}\dfrac{de}{dt}+\dfrac{dk_\theta}{d\gamma}\dfrac{d\gamma}{dt}=\dfrac{dR}{d\theta}-\dfrac{dk_\theta}{da'}\dfrac{da'}{dt}. \end{cases}$$

De ces équations nous pouvons tirer les valeurs de $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ et $\frac{d\gamma}{dt}$, de même que des precédentes nous avons tiré $\frac{da'}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$ et $\frac{d\gamma'}{dt}$.

Pour plus de symétrie, nous prenons le logarithme de a comme variable, au lieu de a. Posons

$$\alpha=\log a,\quad \alpha'=\log a',$$

ce qui donne

$$\frac{dk}{da}=\frac{1}{a}\frac{dk}{d\alpha},\quad \frac{dk}{da'}=\frac{1}{a'}\frac{dk}{d\alpha'}.$$

Si nous différentions les équations (41) nous trouverons facilement

$$\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\alpha'}=\frac{m_1(m_2+m_3)}{2a'n'},$$

$$\frac{dk_{\varepsilon'}}{de'}=0,$$

$$\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma'}=0,$$

$$\frac{dk_{\varpi'}}{d\alpha'}=-\frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}\left(\frac{1}{4}e'^2+\frac{1}{16}e'^4\right),$$

$$\frac{dk_{\varpi'}}{de'}=-\frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}\left(e'+\frac{1}{2}e'^3\right),$$

$$\frac{dk_{\varpi'}}{d\gamma'}=0,$$

$$\frac{dk_{\theta'}}{d\alpha'}=\frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}\left(-\gamma'^2+\frac{1}{2}e'^2\gamma'^2\right).$$

$$\frac{dk_{\theta'}}{de'}=2e'\gamma'^2\,\frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'},$$

$$\frac{dk_{\theta'}}{d\gamma'}=\frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}(-4\gamma'+2e'^2\gamma').$$

Substituons ces valeurs dans les équations (7), nous tirons par l'élimination

$$
(44)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\alpha'}{dt} &= \frac{2a'n'}{m_1(m_2+m_3)}\frac{dR}{d\varepsilon'},\\
\frac{de'}{dt} &= \frac{a'n'}{m_1(m_2+m_3)}\left[\left(-\frac{1}{2}e'+\frac{1}{8}e'^3\right)\frac{dR}{d\varepsilon'}+\left(-\frac{1}{e'}+\frac{1}{2}e'\right)\frac{dR}{d\varpi'}\right],\\
\frac{d\gamma'}{dt} &= \frac{a'n'}{m_1(m_2+m_3)}\left[-\frac{1}{2}\gamma'\left(1+\frac{1}{2}e'^2\right)\frac{dR}{d\varepsilon'}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\gamma'\frac{dR}{d\varpi'}-\frac{1}{4\gamma'}\left(1+\frac{1}{2}e'^2\right)\frac{dR}{d\theta'}\right]
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations sont en effet des développements des équations usuelles et bien connues pour les variations des éléments elliptiques de l'orbite d'une planète, et nous pouvons y substituer, pour les coefficients de $\frac{dR}{d\varepsilon'}$, $\frac{dR}{d\varpi'}$ et $\frac{dR}{d\theta'}$, les valeurs rigoureuses de ces mêmes coefficients, que nous pouvons obtenir avec facilité par la différentiation des expressions qui donnent les valeurs de X, Y et Z en fonction de l'anomalie excentrique.

Maintenant, si nous différentions les trois premières des équations (41) par rapport à a, e, γ, et si nous substituons les valeurs de $\frac{dk_\varepsilon}{d\alpha}$, $\frac{dk_\varepsilon}{de}$, ... dans (43), nous tirons les valeurs de $\frac{d\alpha}{dt}$, ... que voici :

$$
(45)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{2an}{m_2m_3}\left[1+\left(\frac{7}{3}+\frac{9}{4}e^2-9\gamma^2+\frac{7}{2}e'^2\right)m^2-\frac{10067}{288}m^4\right]\\
&\qquad\times\left(\frac{dR}{d\varepsilon}-\frac{dk_\varepsilon}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}-\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{de'}{dt}\right)\\
&\quad-\frac{3anm^2}{2m_2m_3}\left(\frac{dR}{d\varpi}-\frac{dk_\varpi}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}\right)+\frac{3anm^2}{2m_2m_3}\left(\frac{dR}{d\theta}-\frac{dk_\theta}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}\right),\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{ane}{2m_2m_3}\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3289}{96}m^2\right)\left(\frac{dR}{d\varepsilon}-\frac{dk_\varepsilon}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}-\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{de'}{dt}\right)\\
&\quad-\frac{an}{m_2m_3e}\left(1-\frac{1}{2}e^2+\frac{1171}{192}m^2\right)\left(\frac{dR}{d\varpi}-\frac{dk_\varpi}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}\right),\\
\frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{an\gamma}{2m_2m_3}\left(1+\frac{1}{2}e^2+\frac{383}{96}m^2\right)\left(\frac{dR}{d\varepsilon}-\frac{dk_\varepsilon}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}-\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{de'}{dt}\right)\\
&\quad-\frac{an\gamma}{2m_2m_3}\left(\frac{dR}{d\varpi}-\frac{dk_\varpi}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}\right)\\
&\quad-\frac{an}{4\gamma m_2m_3}\left(1+\frac{1}{2}e^2-\frac{53}{192}m^2\right)\left(\frac{dR}{d\theta}-\frac{dk_\theta}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

De même, nous tirons des septième, huitième et neuvième des équations (28) les valeurs de $\frac{d\varepsilon_0}{dt}$, $\frac{d\pi_0}{dt}$ et $\frac{d\theta_0}{dt}$. Si nous négligeons les très-petites dérivées de $k_{\varepsilon'}$, $k_{\pi'}$ et $k_{\theta'}$ par rapport aux éléments a, e, γ, nous trouvons, en ayant égard à la transformation (40),

$$(46)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon}{dt} &= n - \frac{2an}{m_2 m_3}\left[1 + \left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}e^2 - 9\gamma^2 + \frac{7}{2}e'^2\right)m^2 - \frac{10067}{288}m^4\right]\frac{dR}{d\alpha}\\
&\quad + \frac{ane}{2m_2 m_3}\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3289}{96}m^2\right)\frac{dR}{de}\\
&\quad + \frac{an\gamma}{2m_2 m_3}\left(1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{383}{96}m^2\right)\frac{dR}{d\gamma},\\
\frac{d\pi}{dt} &= \pi_1 + \frac{3anm^2}{2m_2 m_3}\frac{dR}{d\alpha} + \frac{an}{m_2 m_3 e}\left(1 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1171}{192}m^2\right)\frac{dR}{de} + \frac{an\gamma}{2m_2 m_3}\frac{dR}{d\gamma},\\
\frac{d\theta}{dt} &= \theta_1 - \frac{3anm^2}{2m_2 m_3}\frac{dR}{d\alpha} + \frac{an}{4\gamma m_2 m_3}\left(1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{53}{192}m^2\right)\frac{dR}{d\gamma}.
\end{aligned}\right.$$

Les valeurs de n, π_1 et θ_1 sont, au degré d'approximation auquel nous nous sommes arrêté,

$$\begin{aligned}
n &= (m_1 + m_2 + m_3)^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}},\\
\pi_1 &= m^2 n\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - 6\gamma^2 + \frac{225}{32}m + \frac{4071}{128}m^2\right),\\
\theta_1 &= -m^2 n\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{9}{32}m - \frac{273}{128}m^2\right).
\end{aligned}$$

De plus, en prenant les dérivées $\frac{dR}{d\alpha}$, $\frac{dR}{de}$, $\frac{dR}{d\gamma}$, il ne faut faire varier ces quantités qu'autant qu'elles sont contenues dans les coefficients des divers termes, hors du signe *sinus* et *cosinus*. Mais il faut considérer les valeurs de n, π_1 et θ_1 comme affectées par les variations de a, de e et de γ, dont ils sont des fonctions, variations que nous tirons des équations (45).

§ VIII.

Sur la forme de la fonction R.

Appelons ρ_1, ρ_2, ρ_3 les distances de la planète au Soleil, à la Terre et à la Lune, respectivement. Nous avons donc

$$R = \frac{m_1 m_4}{\rho_1} + \frac{m_2 m_4}{\rho_2} + \frac{m_3 m_4}{\rho_3}.$$

Nous avons supposé que l'on exprime la fonction R comme il suit, c'est-à-dire que les coordonnées de la planète sont exprimées comme fonction du temps simplement, tandis que celles du Soleil, de la Terre et de la Lune sont exprimées en fonction du temps et des dix-huit constantes arbitraires du mouvement de ces trois corps. Donc ρ_1, ρ_2, ρ_3 et, par conséquent, R deviennent fonctions de ces mêmes arbitraires et du temps. Appelons a l'une quelconque des arbitraires. En différentiant l'équation précédente, nous avons

$$\frac{dR}{da} = -m_4\left(\frac{m_1}{\rho_1^2}\frac{d\rho_1}{da} + \frac{m_2}{\rho_2^2}\frac{d\rho_2}{da} + \frac{m_3}{\rho_3^2}\frac{d\rho_3}{da}\right).$$

Conformément à la notation du § II, nous avons

$$\begin{aligned}
\rho_1^2 &= (\xi_4 - \xi_1)^2 + (\eta_4 - \eta_1)^2 + (\zeta_4 - \zeta_1)^2,\\
\rho_2^2 &= (\xi_4 - \xi_2)^2 + (\eta_4 - \eta_2)^2 + (\zeta_4 - \zeta_2)^2,\\
\rho_3^2 &= (\xi_4 - \xi_3)^2 + (\eta_4 - \eta_3)^2 + (\zeta_4 - \zeta_3)^2.
\end{aligned}$$

Nous avons montré, dans le § III, que nous n'avons pas besoin des dérivées de R par rapport aux constantes qui fixent la position du centre de gravité des trois corps. Par conséquent, nous pouvons prendre ce centre comme origine des coordonnées. En opérant ainsi, et en faisant usage de la même notation que celle des équations (8), ces équations deviennent

$$\begin{aligned}
\rho_1^2 &= (\xi_4 - \mu' X)^2 + (\eta_4 - \mu' Y)^2 + (\zeta_4 - \mu' Z)^2,\\
\rho_2^2 &= [\xi_4 + (1-\mu')X + \mu x]^2 + [\eta_4 + (1-\mu')Y + \mu y]^2\\
&\quad + [\zeta_4 + (1-\mu')Z + \mu z]^2,\\
\rho_3^2 &= [\xi_4 + (1-\mu')X + (1-\mu)y]^2 + [\eta_4 + (1-\mu')Y + (1-\mu)y]^2\\
&\quad + [\zeta_4 + (1-\mu')Z + (1-\mu)z]^2.
\end{aligned}$$

La constante arbitraire a n'étant contenue que dans X, Y, Z, x, y, z, nous avons, pour chaque ρ,

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{d\rho}{dX}\frac{dX}{da} + \ldots + \frac{d\rho}{dx}\frac{dx}{da} + \ldots + \frac{d\rho}{dz}\frac{dz}{da}.$$

Si, après avoir effectué la différentiation de ρ_1^2, ρ_2^2, ρ_3^2 par rapport à a, nous représentons par

x_2, y_2, z_2 les coordonnées de la Terre relativement au Soleil,
x_3, y_3, z_3 » Lune » »
x_4, y_4, z_4 » planète » »

ce qui donne

$$\begin{array}{lll} \xi_4 - \xi_1 = x_4, & \eta_4 - \eta_1 = y_4, & \zeta_4 - \zeta_1 = z_4, \\ \xi_4 - \xi_2 = x_4 - x_2, & \eta_4 - \eta_2 = y_4 - y_2, & \zeta_4 - \zeta_2 = z_4 - z_2, \\ \xi_4 - \xi_3 = x_4 - x_3, & \eta_4 - \eta_3 = y_4 - y_3, & \zeta_4 - \zeta_3 = z_4 - z_3, \end{array}$$

nous trouvons

$$\rho_1 \frac{d\rho_1}{da} = -\mu' x_4 \frac{dX}{da} - \mu' y_4 \frac{dY}{da} - \mu' z_4 \frac{dZ}{da},$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{d\rho_2}{da} = (x_4 - x_2)\left[(1-\mu')\frac{dX}{da} + \mu\frac{dx}{da}\right] \\ + (y_4 - y_2)\left[(1-\mu')\frac{dY}{da} + \mu\frac{dy}{da}\right] \\ + (z_4 - z_2)\left[(1-\mu')\frac{dZ}{da} + \mu\frac{dz}{da}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_3 \frac{d\rho_3}{da} = (x_4 - x_3)\left[(1-\mu')\frac{dX}{da} - (1-\mu)\frac{dx}{da}\right] \\ + (y_4 - y_2)\left[(1-\mu')\frac{dY}{da} - (1-\mu)\frac{dy}{da}\right] \\ + (z_4 - z_3)\left[(1-\mu')\frac{dZ}{da} - (1-\mu)\frac{dz}{da}\right]. \end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans la valeur de $\frac{dR}{da}$, nous trouvons

$$(47)\left\{\begin{aligned} \frac{dR}{da} = m_4 \sum\left[m_1\mu'\frac{x_4}{\rho_1^3} + m_2(1-\mu')\frac{x_2 - x_4}{\rho_2^3} + m_3(1-\mu')\frac{x_3 - x_4}{\rho_3^3}\right]\frac{dX}{da} \\ + m_4 \sum\left[m_2\mu\frac{x_2 - x_1}{\rho_2^3} + m_3(1-\mu)\frac{x_3 - x_1}{\rho_3^3}\right]\frac{dX}{da}, \end{aligned}\right.$$

le signe Σ indiquant la somme des expressions que nous obtenons en mettant successivement X, Y, Z pour X, et x, y, z pour x.

Considérons la quantité

$$m_2 \frac{x_2 - x_1}{\rho_2^3} + m_3 \frac{x_3 - x_1}{\rho_3^3},$$

dont le produit par $(1 - \mu')$ se trouve dans cette expression. Puisque les différences $x_2 - x_3$, $\rho_2 - \rho_3$ sont très-petites, nous pouvons développer cette dernière quantité en une série très-convergente. Puisque le premier terme $m_2 \frac{x_2 - x_1}{\rho_2^3}$ est une fonction des coordonnées de la Terre, multipliée par la masse de cet astre; et, puisque le dernier terme est la même fonction des coordonnées et de la masse de la Lune, il s'ensuit que leur somme, développée aux termes du premier ordre, sera la même fonction des coordonnées de leur centre commun de gravité multiplié par la somme de leurs masses; c'est-à-dire que nous avons, aux quantités du second ordre près,

$$m_2 \frac{x_2 - x_1}{\rho_2^3} + m_3 \frac{x_3 - x_1}{\rho_3^3} = -(m_2 + m_3) \frac{x_1 - X}{\rho^3},$$

en représentant par ρ la distance de la planète au centre commun de la Terre et de la Lune. Nous avons posé

$$\mu' = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

ce qui donne

$$(m_2 + m_3)(1 - \mu') = m_1 \mu'.$$

En faisant ces substitutions, la première partie de $\frac{dR}{da}$ devient

$$m_1 m_4 \mu' \sum \left(\frac{x_1}{\rho_1^3} - \frac{X + x_1}{\rho^3} \right) \frac{dX}{da}.$$

Cette expression équivaut à

$$m_1 m_4 \mu' \frac{d}{da} \left(\frac{x_1 X + y_1 Y + z_1 Z}{\rho_1^3} + \frac{1}{\rho} \right),$$

pourvu que, dans cette expression, nous regardions x_4, y_4, z_4 et ρ_4 commme ne contenant pas l'arbitraire a.

Passons au second terme de $\frac{dR}{da}$. Puisque

$$\mu = \frac{m_3}{m_2 + m_3},$$

nous avons

$$m_2 \mu = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} = m_3 (1 - \mu).$$

Le terme dont il s'agit devient ainsi

$$m_4 \nu \sum \left(\frac{x_2 - x_4}{\rho_2^3} - \frac{x_3 - x_4}{\rho_3^3} \right) \frac{dx}{da}.$$

Dans cette expression nous avons posé, pour abréger,

$$\nu = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}.$$

De plus, nous avons

$$\rho_2^2 = (X + x_4 + \mu x)^2 + (Y + y_4 + \mu y)^2 + (Z + z_4 + \mu z)^2,$$
$$\rho_3^2 = [X + x_4 - (1 - \mu) x]^2 + [Y + y_4 - (1 - \mu) y]^2 + [Z + z_4 - (1 - \mu) z]^2.$$

Puisque x, y, z sont très-petits par rapport à x_4 et X, nous pouvons développer les fonctions de ρ_1, ρ_2 en une série convergente ordonnée suivant les puissances de ces quantités. Nous avons ainsi, aux quantités du premier ordre près,

$$(48)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_2^3} = \dfrac{1}{\rho^3} - \dfrac{3\mu}{\rho^5} [x(X + x_4) + y(Y + y_4) + z(Z + z_4)], \\[2mm] \dfrac{1}{\rho_3^3} = \dfrac{1}{\rho^3} + \dfrac{3(1-\mu)}{\rho^5} [x(X + x_4) + y(Y + y_4) + z(Z + z_4)]. \end{cases}$$

L'expression dont il s'agit devient ainsi

$$m_4 \nu \sum \left\{ \frac{3(X + x_4)}{\rho^5} [x(X + x_4) + y(Y + y_4) + z(Z + z_4)] - \frac{x}{\rho^3} \right\} \frac{dx}{da}.$$

En posant, de plus,

$$\Delta = x(X + x_4) + y(Y + y_4) + z(Z + z_4),$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

l'expression se réduit à

$$m_4 \nu \left[\frac{3}{2\rho^5} \frac{d(\Delta^2)}{da} - \frac{1}{2\rho^3} \frac{d(r^2)}{da} \right],$$

pourvu que nous ne prenions les dérivées par rapport à a qu'autant que cette arbitraire est contenue dans les coordonnées de la Lune relativement à la Terre. Par conséquent, si nous posons

$$(49) \quad R' = m_1 m_4 \mu' \left(\frac{1}{\rho} + \frac{X x_4 + Y y_4 + Z z_4}{\rho_1^3} \right) + \frac{1}{4} m_4 \nu \left(\frac{3\Delta^2}{\rho^5} - \frac{r^2}{\rho^3} \right),$$

nous avons

$$\frac{dR'}{da} = \frac{dR}{da},$$

pourvu que, dans le premier terme de R', nous regardions x_4, y_4, z_4, ρ_1 comme constants, et que, dans le second terme, nous regardions seulement les coordonnées de la Lune comme variables. Par conséquent, nous pouvons substituer R' pour R dans les équations (45), (46). L'intégration de ces équations, en négligeant les termes qui sont multipliés par le carré et le produit des masses, sera bien facile dès que nous aurons développé R' en fonction des constantes arbitraires et du temps. La formation de ce développement est un travail de calcul dans lequel je n'ai pu trouver d'artifices d'analyse qui en facilitent l'exécution. Par conséquent, je ne me propose pas d'y entrer dans le Mémoire actuel.

Peut-être on voudra bien me permettre d'indiquer les avantages que, il me semble, cette méthode de calculer les inégalités dont il s'agit peut nous offrir:

1° Les équations (45), (46), quoique pas rigoureuses comme nous les avons écrites, peuvent être poussées à tel degré d'exactitude que nous voudrons, sans que nous soyons obligé de reprendre nos calculs;

2° Nous pouvons, au commencement de nos calculs, pousser le développement de R à tel degré d'approximation que nous voulons, et j'espère qu'on parviendra à montrer qu'aucun terme au-dessus d'un certain ordre de grandeur n'a été omis.

Mais, je ne fais que rendre justice au grand ouvrage de M. Delaunay en disant que, en partant de ses équations différentielles finales et en y regardant l'action de la planète comme ajoutant de nouveaux termes à R, on parviendra à des équations du même degré de rigueur que celles qui font l'objet de ce Mémoire. Cependant il ne me semble pas inutile de montrer comment on peut arriver à des résultats semblables par une autre voie.

Extrait du Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état; présenté le 20 juin 1870 [*];

PAR M. MAURICE LEVY.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, séance du 14 février 1871.)

7. Dans ce Mémoire, on établit pour des mouvements quelconques dans l'espace, et aussi pour ceux du cas important où tout est symétrique autour d'un axe, les équations générales de ces mouvements de déformation des masses ductiles, qui avaient été données par M. de Saint-Venant le 7 mars 1870 [**], pour le seul cas de mouvements tous semblables dans des plans parallèles, cas où l'on peut abstraire la dimension qui leur est perpendiculaire et ne considérer que deux des trois coordonnées des points.

Soient généralement

u, v, w les composantes de la vitesse d'un point quelconque du corps ductile dans les sens respectifs de ses coordonnées rectangles x, y, z;

X_0, Y_0, Z_0 les sommes de composantes, dans les mêmes sens, des forces (telles que la pesanteur) émanant de centres d'action éloignés, par unité de masse au même point (x, y, z);

---

[*] On donne à cet Extrait, tiré des *Comptes rendus*, t. LXX, p. 1323, des numéros d'articles et d'équations faisant suite à ceux du Mémoire de M. de Saint-Venant du 7 mars (voyez ci-dessus p. 308-316), parce qu'il en forme comme un premier complément.

Le Mémoire de M. Levy, *in extenso*, d'après un vote de l'Académie du 10 juillet 1871 (*voir* le Rapport aux *Comptes rendus*, t. LXXIII, p. 86), paraîtra au tome XXI des *Savants étrangers*.

[**] *Comptes rendus*, t. LXX, p. 479.

N_x, N_y, N_z les composantes normales des pressions ou plutôt des tensions supportées, au même point, par l'unité superficielle de trois petites faces respectivement perpendiculaires aux x, aux y, aux z;

Δ_x, Δ_y, Δ_z ces trois composantes diminuées de leur moyenne $\frac{1}{3}(N_x + N_y + N_z)$;

T_x, T_y, T_z les composantes tangentielles des mêmes pressions ou tensions; la première étant la composante suivant les z de la pression sur une face $= 1$ perpendiculaire aux y, ou réciproquement; et les deux autres étant des composantes analogues, obtenues en permutant x, y, z circulairement;

ρ la densité de la matière ductile;

K son coefficient de résistance à la rupture par glissement transversal, ou au cisaillement, pour l'unité superficielle.

Si l'on fait, pour abréger,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_y\Delta_z + \Delta_z\Delta_x + \Delta_x\Delta_y - T_x^2 - T_y^2 - T_z^2 = q,\\ &\Delta_x T_x^2 + \Delta_y T_y^2 + \Delta_z T_z^2 - \Delta_x\Delta_y\Delta_z - 2T_xT_yT_z = r,\end{aligned}\right.$$

les neuf équations *indéfinies* ou applicables à tous les points de la masse, propres à déterminer, avec les conditions définies ou *conditions-limites* particulières à chaque problème, les neuf inconnues u, v, w, N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, sont :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dN_x}{dx} + \frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz} = -\rho\left(X_0 - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}\right),\\ &\frac{dT_z}{dx} + \frac{dN_y}{dy} + \frac{dT_x}{dz} = -\rho\left(Y_0 - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz}\right),\\ &\frac{dT_y}{dx} + \frac{dT_x}{dy} + \frac{dN_z}{dz} = -\rho\left(Z_0 - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}\right),\\ &\qquad 4(K^2 + q)(4K^2 + q) + 27r^2 = 0,\\ &\qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,\\ &\frac{T_x}{\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}} = \frac{T_y}{\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}} = \frac{T_z}{\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}} = \frac{N_y - N_z}{2\left(\frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right)} = \frac{N_z - N_x}{2\left(\frac{dw}{dz} - \frac{du}{dx}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Lorsqu'on peut abstraire la coordonnée y, la deuxième équation (13) n'existe pas, vu qu'on a $T_x = 0$, $T_z = 0$, $v = 0$, et les $\frac{d}{dy}$ nuls. La quatrième équation, fort compliquée comme on voit dans le cas général, se réduit à $4T_y^2 + (N_z - N_x)^2 = 4K^2$ ou à (6). Les quatre dernières se réduisent à deux, dont une seulement [la cinquième (9)] avait été donnée le 7 mars par M. de Saint-Venant, vu qu'il ne s'occupait pas de la composante N_y, moins utile à considérer, et qui cependant existe et est égale à $\frac{1}{2}(N_x + N_z)$: cette valeur de N_y résulte en effet de la dernière des égalités (13) et de ce que $\frac{dv}{dy} = 0$, $\frac{dw}{dz} = -\frac{du}{dx}$; d'où

$$\frac{N_y - N_z}{2\frac{du}{dx}} = \frac{N_z - N_x}{-4\frac{du}{dx}} \quad \text{ou} \quad 2N_y - 2N_z = -N_z + N_x,$$

ce qui donne bien

$$N_y = \frac{N_z + N_x}{2}.$$

8. Lorsqu'il y a symétrie autour de l'axe des z, cas intéressant à considérer, car c'est celui des expériences de M. Tresca, tant d'*écoulement* que de poinçonnage, si l'on nomme :

U, W les composantes de la vitesse d'un point du bloc ductile cylindrique suivant le rayon vecteur r tiré perpendiculairement de ce point sur l'axe, et suivant la coordonnée z;

N_r, N_z, N_ω les composantes normales de pression par unité superficielle sur des faces perpendiculaires à r et à z, et sur une face méridienne, se croisant toutes trois au même point;

$T = p_{zr}$ la composante, suivant le rayon r, de la pression s'exerçant sur une face perpendiculaire à l'axe de symétrie, ou bien celle, de même grandeur, suivant une parallèle à l'axe, de la pression sur une face perpendiculaire au rayon;

R_0, Z_0 les composantes de la force extérieure s'exerçant par unité de masse, parallèlement aux r et aux z respectivement;

L'on a, pour déterminer U, W, N_r, N_z, N_ω, T, les six équations

indéfinies :

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{dN_r}{dr}+\dfrac{dT}{dz}+\dfrac{N_r-N_\omega}{r}=-\rho\left(R_0-\dfrac{dU}{dt}-U\dfrac{dU}{dr}-W\dfrac{dU}{dz}\right), \\ \dfrac{dT}{dr}+\dfrac{dN_z}{dz}+\dfrac{T}{r}=-\rho\left(Z_0-\dfrac{dW}{dt}-U\dfrac{dW}{dr}-W\dfrac{dW}{dz}\right), \\ 4T^2+(N_r-N_z)^2=4K^2, \\ \dfrac{dU}{dr}+\dfrac{U}{r}+\dfrac{dW}{dz}=0, \\ \dfrac{T}{\dfrac{dW}{dr}+\dfrac{dU}{dz}}=\dfrac{N_r-N_z}{2\left(\dfrac{dU}{dr}-\dfrac{dW}{dz}\right)}=\dfrac{N_r-N_\omega}{2\left(\dfrac{dU}{dr}-\dfrac{U}{r}\right)}. \end{cases}$$

On peut ordinairement, vu que les mouvements sont généralement supposés très-lents, et que les effets de la pesanteur sont négligeables, mettre zéro à la place des seconds membres des trois premières équations (13) ou des deux premières (14).

C'est ce qu'on ne ferait pas si, au lieu d'un solide ductile déformé lentement, on avait une pâte molle ou un liquide visqueux dont les parties fussent mues avec des vitesses telles, que les effets de l'inertie de la matière et des actions moléculaires dynamiques ne seraient pas négligeables. Et l'on a pu voir (n° 6, page 316) que M. de Saint-Venant ajoute alors, à ce qui entre dans les premiers membres des premières équations, des termes différentiels comme ceux des équations et formules du mouvement des fluides, de Navier, Poisson et Cauchy, termes affectés d'un coefficient de frottement intérieur ε qu'il ne faut point confondre avec K, ce dernier mesurant alors la *viscosité* du liquide ou la cohésion de la pâte.

COMPLÉMENT *aux Mémoires du 7 mars 1870 de* M. DE SAINT-VENANT *et du 19 juin 1870 de* M. LEVY *sur les équations différentielles* indéfinies *du mouvement intérieur des solides ductiles, etc.; — Équations* définies *ou relatives aux limites de ces corps; — Applications;*

PAR M. DE SAINT-VENANT.

---

9. L'appel qui était fait à la fin (n° 5, p. 316) du Mémoire du 7 mars a été entendu par M. Levy, comme on peut voir par l'Extrait ci-dessus de son Mémoire du 19 juin, où il donne les équations différentielles (13) et (14) *indéfinies*, c'est-à-dire applicables à tous les points du bloc ductile déformé, des mouvements intérieurs qui y sont produits :

1° Pour le cas général où il est nécessaire d'employer les trois coordonnées x, y, z, et où il y a à déterminer, outre les *trois* composantes u, v, w, de la vitesse, les *six* composantes de pression ou tension, auxquelles nous donnons cette notation double

$$(15)\quad p_{xx}=\mathrm{N}_x,\quad p_{yy}=\mathrm{N}_y,\quad p_{zz}=\mathrm{N}_z,\quad p_{yz}=\mathrm{T}_x,\quad p_{zx}=\mathrm{T}_y,\quad p_{xy}=\mathrm{T}_z\ [*].$$

2° Pour le cas de symétrie *semi-polaire* des mouvements autour d'un axe pris pour celui des z, et où les cinq inconnues sont, outre les

---

[*] La quatrième de ses *neuf* équations (13) résulte de la substitution du carré du double de la composante tangentielle maximum constante K à la place de l'inconnue, dans l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation du troisième degré de Cauchy (*Exercices*, 1827, p. 163, ou *Leçons* de Lamé, § 22) donnant les trois pressions *principales*, au nombre desquelles sont la plus grande et la plus petite des composantes normales, dont la demi-différence mesure la plus grande composante tangentielle. Les quatre dernières équations s'obtiennent en exprimant, comme j'avais fait pour les fluides en novembre 1843 (*Comptes rendus*, t. XVII, p. 1243), que la composante tangentielle de pression est nulle sur toute face suivant la direction (et il y en a toujours une) où la vitesse de glissement est nulle.

composantes U et W de la vitesse, les *deux* composantes normales et la composante tangentielle

$$(16) \qquad p_{rr} = N_r, \quad p_{\omega\omega} = N_\omega \quad \text{et} \quad p_{zr} = T$$

des pressions ou tensions sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur r et sur un plan méridien, la dernière étant la composante, suivant r, de la pression sur une face perpendiculaire à z.

Et il a observé judicieusement que l'on pouvait habituellement réduire à zéro les seconds membres des deux premières équations (9) et (14) et des trois premières (13), ce qui les rend plus simples que celles des problèmes sur les fluides, où tous les termes de ces seconds membres sont généralement à conserver.

Les pressions $p_{xx}, \ldots$ ou N, T,... n'entrent alors, comme on voit, dans toutes ces équations, que pour leurs rapports entre elles, ainsi qu'avec la résistance spécifique K de la matière à la déformation permanente.

Les u, v, w n'y entrent, alors aussi, que pour leurs rapports mutuels, et l'on peut, sans changer les équations, augmenter ces vitesses ou les diminuer toutes dans une même proportion. On déterminera leurs grandeurs absolues lorsque l'une d'elles sera donnée, par exemple la vitesse de l'enfoncement, quelque part, d'un piston ou d'un poinçon, ou celle avec laquelle on ploie ou tord un prisme ductile, etc.

10. Remarquons en passant que, dans certains cas, celui par exemple (n° 4) de mouvements tous les mêmes dans des plans parallèles et où il suffit de deux coordonnées rectangles x, z, l'on peut d'abord, sans s'occuper des vitesses, établir une équation propre à donner les pressions.

En effet, si nous combinons ensemble nos deux premières équations (9) avec la quatrième en prenant [*] une inconnue auxiliaire ψ telle qu'on ait

$$(17) \qquad N_x = \frac{d^2\psi}{dz^2}, \quad N_z = \frac{d^2\psi}{dx^2}, \quad T = -\frac{d^2\psi}{dx\,dz},$$

[*] Comme a fait le même M. Levy dans un Mémoire sur l'équilibre des masses de terre sans consistance. (Voir *Comptes rendus*, surtout 7 février et 4 avril 1870, t. LXX, p. 232 et 751.)

nous satisfaisons aux deux premières équations (9), avec zéro pour seconds membres; et la substitution dans la quatrième donne

$$(18) \qquad 4\left(\frac{d^2\psi}{dx\,dz}\right)^2 + \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d^2\psi}{dz^2}\right)^2 = 4K^2.$$

Si l'on parvient à tirer, par quelque méthode d'approximation, la valeur de ψ de cette équation différentielle non linéaire, et à déterminer ainsi, en x et z, les expressions de N_x, N_z, T ou de leurs rapports à K, la troisième et la cinquième des équations (9) donneront le moyen de déterminer u et w, ou leurs rapports à la vitesse supposée donnée, comme nous venons de dire, d'un point de la surface; ce qui sera la solution du problème de la suite des déformations ou des déplacements des points du bloc ductile.

11. Mais il ne suffit pas que les expressions des inconnues satisfassent aux équations *indéfinies* (9) ou (13) ou (14), applicables à tous les points du bloc. Elles sont astreintes à vérifier encore des équations dites *définies*, ou à remplir des *conditions-limites* relatives aux points de certaines surfaces.

Il s'agit d'établir ces équations *définies* ou *déterminées*. Faisons d'abord deux remarques :

1° En général, la matière de portions plus ou moins grandes du bloc ductile demeurera soumise aux lois de l'élasticité, ou restera, vu la faiblesse des déformations de ces portions, capable de revenir d'elle-même à l'état primitif, fort peu différent de l'état nouveau. C'est même ce qu'a observé M. Tresca, surtout dans ses expériences sur le poinçonnage, où il fait voir que les pressions, ou pour mieux dire leurs effets permanents, ne se transmettent que dans un espace limité et restreint, qu'il appelle leur *zone d'activité*. D'autres portions du bloc rentreront sous l'empire de ces mêmes lois d'élasticité après en être sorties : ce seront celles qui auront cessé d'être déformées d'une manière continue, comme par exemple le *jet* prismatique qui a traversé un orifice, ou la barre hors du laminoir, etc.

2° Les autres portions, savoir celles qui, suivant l'expression du même expérimentateur, sont arrivées et sont encore à l'état de *fluidité*, ou de *plasticité*, dans lequel elles éprouvent une suite crois-

sante de déformations pour la plus grande partie persistantes, peuvent très-bien s'étendre jusqu'aux endroits de la surface extérieure où celle-ci est libre, c'est-à-dire n'éprouve aucune pression, ou ne supporte que celle de l'atmosphère, toujours négligeable; et cela peut avoir lieu quelque grande que soit l'intensité constante K de la composante tangentielle de pression agissant alors, au même endroit, sur la face du plus grand glissement. En effet, si nous prenons, par exemple, pour plan des yz cette surface extérieure et libre, ou son plan tangent en un point quelconque, les trois composantes p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} de la pression sur cette surface peuvent être nulles, et cependant les trois autres, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, agissant au même endroit sur des faces perpendiculaires, peuvent être *aussi considérables qu'on veut*. C'est ce qui a lieu, par exemple, aux points des faces latérales libres d'un prisme lorsqu'on l'étend longitudinalement, ou lorsqu'on le ploie ou le tord, jusqu'à le rompre s'il n'est pas ductile, ou jusqu'à le déformer fortement si sa matière a de la ductilité. Alors, sur de petites faces faisant 45 degrés avec la surface libre, la composante tangentielle $\frac{p_{yy}-p_{xx}}{2}=\frac{p_{yy}}{2}$ peut avoir la valeur très-grande K, malgré la nullité de toute pression sur cette surface perpendiculaire aux x.

Il faut donc poser généralement trois groupes d'équations définies :

1° Celles qui sont relatives aux points de la surface-enveloppe du corps, dans les parties qui ont conservé ou qui ont repris leur élasticité, c'est-à-dire qui n'ont éprouvé ou n'éprouvent plus que des déformations cessant avec l'action des forces. En désignant par n la direction de la normale à cette surface-enveloppe au point (x, y, z) et (e étant un simple indice) par

$$p^{e}_{xx},\ldots,\ldots,\quad p^{e}_{yz},\ldots,\ldots,\quad p^{e}_{xy}$$

les six composantes des pressions *élastiques* intérieures, dont on connaît, par la théorie de l'élasticité, l'expression en fonction des dérivées des déplacements des points, l'on aura, ϖ_{e} désignant l'intensité et aussi la direction de la pression ou tension extérieure censée connue qui agit par unité superficielle en cet endroit, le premier groupe

d'équations définies :

$$(19)\quad \begin{cases} p^e_{xx}\cos(\mathrm{n}, x) + p^e_{xy}\cos(\mathrm{n}, y) + p^e_{xz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi_e\cos(\varpi_e, x), \\ p^e_{yx}\cos(\mathrm{n}, x) + p^e_{yy}\cos(\mathrm{n}, y) + p^e_{yz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi_e\cos(\varpi_e, y), \\ p^e_{zx}\cos(\mathrm{n}, x) + p^e_{zy}\cos(\mathrm{n}, y) + p^e_{zz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi_e\cos(\varpi_e, z). \end{cases}$$

2° Celles qui sont relatives aux points de la surface-enveloppe où la matière est arrivée à éprouver et éprouve encore une suite continue de déformations persistantes, et est soumise ainsi aux lois de la *plasticité*. On a, n désignant encore la direction de la normale à la surface, et ϖ étant la pression extérieure, le second groupe

$$(20)\quad \begin{cases} p_{xx}\cos(\mathrm{n}, x) + p_{xy}\cos(\mathrm{n}, y) + p_{xz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi\cos(\varpi, x), \\ p_{yx}\cos(\mathrm{n}, x) + p_{yy}\cos(\mathrm{n}, y) + p_{yz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi\cos(\varpi, y), \\ p_{zx}\cos(\mathrm{n}, x) + p_{zy}\cos(\mathrm{n}, y) + p_{zz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi\cos(\varpi, z), \end{cases}$$

où $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$ sont des forces qui satisfont aux équations (9), ou aux autres plus générales (13), établies ci-dessus.

3° Les équations de *raccordement* en quelque sorte, qui sont relatives aux points (x, y, z) de la surface de séparation, quelle qu'elle soit, des parties élastiques et des parties plastiques : ces équations, exprimant l'équilibre d'une couche mince de transition, entre les pressions p^e régnant du côté élastique et les pressions p régnant du côté plastique, seront, n désignant encore les directions des normales à cette surface,

$$(21)\quad \begin{cases} (p^e_{xx}-p_{xx})\cos(\mathrm{n},x)+(p^e_{xy}-p_{xy})\cos(\mathrm{n},y)+(p^e_{xz}-p_{xz})\cos(\mathrm{n},z)=0, \\ (p^e_{yx}-p_{yx})\cos(\mathrm{n},x)+(p^e_{yy}-p_{yy})\cos(\mathrm{n},y)+(p^e_{yz}-p_{yz})\cos(\mathrm{n},z)=0, \\ (p^e_{zx}-p_{zx})\cos(\mathrm{n},x)+(p^e_{zy}-p_{xy})\cos(\mathrm{n},y)+(p^e_{zz}-p_{zz})\cos(\mathrm{n},z)=0. \end{cases}$$

4° On peut mettre aussi au nombre des équations ou conditions définies celles qui assignent, pour certains endroits de la surface, la grandeur supposée connue de la vitesse, comme on a dit à la fin du n° **9**.

Enfin il faut poser des équations d'équilibre, pour la partie restée ou redevenue élastique, limitée, soit de toutes parts, soit de certains

côtés seulement, par la surface de raccordement dont nous venons de parler, et, dans ce dernier cas, aussi par quelque portion de la surface-enveloppe extérieure. Ces équations indéfinies seront, X_e, Y_e, Z_e désignant les composantes suivant x, y, z, des forces qui agissent sur l'unité de sa masse

(22) Les trois trinômes différentiels (3) avec des p^e au lieu des $p = \begin{cases} -\rho X_e, \\ \text{ou } -\rho Y_e, \\ \text{ou } -\rho Z_0. \end{cases}$

La surface de séparation des parties élastiques et des parties plastiques devra être cherchée, de manière que ses coordonnées satisfassent aux équations définies de raccordement (21). Les équations indéfinies telles que (9) ou (13) et (22), si l'on parvient à les intégrer de manière à satisfaire aux autres équations définies (19), (20), donneront les pressions et les vitesses.

12. Quelque compliqué que soit en général un pareil problème, il peut être facilement résolu dans quelques cas.

Supposons, par exemple, que l'on torde lentement, de manière à le déformer d'une manière persistante et croissante, sans le rompre, un cylindre d'un métal ductile, à base circulaire. On suppose que les forces sont appliquées seulement sur les bases extrêmes [*], de manière à avoir une torsion constante d'un bout à l'autre, et que sur la face latérale il ne s'exerce aucune pression.

On aura, l'axe du cylindre étant pris pour celui des x, et aucune traction n'étant supposée exercée longitudinalement,

$$N_x = 0, \quad N_y = 0, \quad N_z = 0, \quad T_x = p_{yz} = 0.$$

Les formules (12) et la quatrième (13) se réduisent à

$$(23) \qquad q = -T_y^2 - T_z^2, \quad r = 0, \quad \text{et} \quad T_y^2 + T_z^2 = K^2,$$

exprimant simplement que, sur les sections transversales, la plus grande composante tangentielle de pression, qui est nécessairement

---

[*] *Mémoire sur la torsion* au tome XIV des *Savants étrangers*, ou *Note sur l'édition de* 1864 *des Leçons de Navier*.

dirigée suivant une perpendiculaire au rayon vecteur, a l'intensité K dans l'état plastique. Appelons donc :

R le rayon du cylindre;

R_0 le rayon d'une partie centrale, qui à un instant donné est restée élastique, ou dont les molécules ont conservé les mêmes dispositions mutuelles;

r la distance d'un point quelconque à l'axe;

θ la *torsion*, c'est-à-dire l'angle (ou l'arc en parties du rayon) dont une des bases du cylindre a tourné devant l'autre, divisé par la distance de ces deux bases;

g le *glissement*, ou la petite inclinaison qu'a prise, sur la normale à un élément d'une des sections transversales de la partie élastique, une ligne matérielle qui lui était primitivement normale elle-même;

G le coefficient d'élasticité de glissement de la matière, ou Gg la composante de pression ou traction tangentielle que détermine, par unité de surface, le glissement opéré g;

M le moment, autour de l'axe du cylindre, des forces extérieures déterminant la torsion.

Quelque grand que devienne θ, θr sera petit dans la partie centrale, par cela seul qu'on la suppose restée élastique; et, comme les sections sont restées planes, on a

$$g = \theta r.$$

Sur tous les éléments d'une portion de la base, en forme de couronne, dont l'aire est $2\pi r dr$, comprise entre deux cercles de rayon r et $r + dr$, la résistance à la torsion est ainsi $G\theta r$ par unité superficielle de la partie élastique; elle est K dans la partie devenue plastique. Multipliant par les bras de levier r, on a, pour l'égalité à M de la somme totale des moments des résistances,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} M &= \int_0^{R_0} G\theta r . 2\pi r dr . r + \int_{R_0}^{R} K . 2\pi r dr . r \\ &= 2\pi\left[G\theta\frac{R_0^4}{4} + K\left(\frac{R^3}{3} - \frac{R_0^3}{3}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Il faut, pour avoir la grandeur du rayon R_0 de la surface de sépara-

tion des deux parties, poser l'équation de *raccordement*, dont la forme générale est (21). Ici cette équation est unique et se réduit à

$$(25)\qquad G\theta R_0 - K = 0.$$

Elle ne convient, bien entendu, qu'autant qu'elle donne une valeur de R_0 moindre que R. On a donc :

1° Tant que θ reste $< \frac{K}{GR}$, ou $M < \frac{\pi R^3}{2} K$,

$$(26)\qquad M = \pi G \theta \frac{R^4}{2},$$

équation connue, applicable tant que l'état élastique se conserve partout;

2° A partir de θ devenu $= \frac{K}{GR}$, ou de M devenu $= \frac{\pi R^3}{2} K$,

$$(27)\qquad M = 2\pi K \frac{R^3}{3} - \frac{\pi}{6} \frac{K^4}{G^3\theta^3} = \pi K \left(\frac{2}{3} R^3 - \frac{1}{6} \frac{K^3}{G^3\theta^3}\right).$$

Ce n'est que pour une torsion infinie que M se réduirait à la quantité constante $\frac{2}{3}\pi K R^3$, et qu'on aurait $R_0 = 0$, ou que l'élasticité serait vaincue jusqu'à l'axe.

15. Soit, en second lieu, un prisme rectangle de matière ductile, ayant deux de ses faces horizontales, et les deux autres verticales, auquel on fait éprouver la *flexion* dite *égale* ou *circulaire*, par une application convenable, sur les éléments de ses deux bases, de tractions et de pressions normales faisant *couples*, de sorte que toutes ses *fibres* longitudinales se courbent en arcs de cercle ayant leurs centres sur une même droite horizontale perpendiculaire à leurs plans. Appelons :

$2b$ la largeur horizontale du prisme;

$2c$ sa hauteur ou épaisseur verticale;

$2c_0$ la hauteur de sa partie milieu, de même largeur $2b$, qui est supposée obéir encore à la loi de l'élasticité quand le rayon de courbure moyen a pris une valeur ρ;

E le coefficient d'élasticité d'extension ou de compression des fibres ou éléments longitudinaux de cette partie;

z la distance de chaque fibre à la surface, primitivement horizontale, de celles qui sont restées de même longueur, et situées à égale distance des faces inférieure et supérieure.

Comme les sections transversales sont restées planes et normales aux fibres devenues courbes, celles-ci se sont allongées positivement ou négativement dans les proportions $\frac{z}{\rho}$. Celles de la partie élastique réagissent ou résistent avec une force $\frac{\mathrm{E}z}{\rho}$ par unité superficielle de leur section. Quant aux fibres des deux parties supérieure et inférieure devenues plastiques sur des épaisseurs $c - c_0$, elles réagissent par traction, du côté supérieur ou des z positifs, et par pression ou répulsion du côté des z négatifs, avec une force constante $2\mathrm{K}$, aussi par unité de leur section : car, comme on a, si x est la coordonnée dans la direction des fibres, $\mathrm{N}_z = 0$, $\mathrm{N}_y = 0$, et les $\mathrm{T} = 0$, il en résulte [4^{e} équation (9)] $\frac{\mathrm{N}_x^2}{4} = \mathrm{K}^2$, ou la réaction longitudinale $\mathrm{N}_x = 2\mathrm{K}$.

L'expression du moment de flexion M est donc

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M} &= \int_{c_0}^{c_0} \frac{\mathrm{E}z}{\rho}\cdot 2b\,dz.z + \int_{-c}^{-c_0} (-2\mathrm{K}).2bz\,dz + \int_{c_0}^{c} 2\mathrm{K}.2bz\,dz \\ &= \frac{4}{3}\frac{\mathrm{E}}{\rho} bc_0^3 + 4\mathrm{K}b(c^2 - c_0^2). \end{aligned}\right.$$

L'équation de raccordement, déterminant la grandeur inconnue de c_0, est

$$(29)\qquad \frac{\mathrm{E}c_0}{\rho} = 2\mathrm{K},$$

qui exige que c_0 soit $< c$. Substituant, on a la formule

$$(30)\qquad \mathrm{M} = 4\mathrm{K}b\left(c^2 - \frac{4}{3}\frac{\mathrm{K}^2\rho^2}{\mathrm{E}^2}\right),$$

applicable seulement pour $\rho =$ ou $< \frac{\mathrm{E}c}{2\mathrm{K}}$, car tant que $\rho > \frac{\mathrm{E}c}{2\mathrm{K}}$ l'élasticité subsiste partout, et l'on a la formule ordinaire $\mathrm{M} = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{E}}{\rho} bc^3$. Ce n'est que pour $\rho = 0$ ou une courbure infinie que l'élasticité serait vaincue jusqu'au milieu de l'épaisseur du prisme.

14. Quant aux problèmes de l'*écoulement* et du poinçonnage de métaux ductiles, etc., sur lesquels M. Tresca a présenté des résultats d'expériences, ils sont plus compliqués, et il faudra des artifices d'analyse pour tirer, des équations ci-dessus, leurs solutions approchées. J'insisterai, à ce sujet, sur la nécessité, que j'ai déjà signalée à plusieurs reprises, surtout à la fin de ma Note *Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance*, etc., du 14 février 1870 [*], de faire, sans opérer cette division en plaques ou rondelles qui, de l'aveu de M. Tresca, change tout à fait les conditions du mouvement intérieur (dont elle ne révèle d'ailleurs qu'une faible partie), de nouvelles expériences, préparées de manière à donner la suite des positions prises par les divers points des blocs, et offrant par conséquent des solutions complètes, par les faits, du problème posé. Sans aucun doute, bien des procédés matériels, autres même que celui dont j'ai proposé l'emploi à la Note citée, pourront être imaginés pour ce but par des expérimentateurs ingénieux. C'est seulement lorsque l'on aura acquis, pour un certain nombre de cas, ces données qui aujourd'hui manquent absolument, qu'il sera possible de reconnaître quelles formules, dans les autres cas particuliers, il conviendra le mieux d'essayer pour exprimer les inconnues (u, v, w), afin de satisfaire approximativement aux équations du problème, faute d'en pouvoir trouver les intégrales exactes.

---

[*] *Comptes rendus*, t. LXX, p. 311. Le coefficient de résistance *plastique* à l'extension ou à la compression permanente d'une matière ductile, et celui de sa résistance aussi plastique au glissement ou au cisaillement, ne sont égaux que lorsque la force produisant l'extension longitudinale d'une portion prismatique (rectangle par exemple) est accompagnée et en quelque sorte secondée par une ou deux forces de même intensité K par unité superficielle, produisant la compression dans une ou deux des directions latérales, de sorte que le volume ne change pas. Si les deux faces latérales du prisme rectangle sont *libres*, c'est-à-dire non pressées, il faut, comme on vient de voir (n° 13), exercer longitudinalement une force double, ou 2K, par unité de la surface des bases. C'est en ce sens qu'il faut entendre l'égalité des deux coefficients de résistance, établie expérimentalement par M. Tresca, et démontrée théoriquement à la Note citée, au moyen de la considération du travail total opéré dans les diverses suppositions.

Théorèmes sur les groupes primitifs;

PAR M. CAMILLE JORDAN,
Ingénieur des Mines.

1. Les principales difficultés de la théorie des substitutions se rencontrent dans la recherche des groupes primitifs. Les propriétés générales de ces groupes méritent donc une attention particulière. Mais on n'en connaît encore qu'un petit nombre.

L'une des plus utiles est la suivante, dont nous avons donné la démonstration dans notre *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Note C.

Si un groupe G, primitif et de degré n, contient une substitution circulaire de degré premier p, il sera au moins $n-p+1$ fois transitif.

On sait d'ailleurs qu'un groupe de degré n, qui n'est pas symétrique ou alterné (nous appelons, pour abréger, *groupe symétrique* celui qui contient toutes les substitutions possibles), ne peut être plus de $\frac{n+4}{3}$ fois transitif (*Traité des substitutions*, n° 85). Si donc G n'est pas symétrique ou alterné, on aura la relation

$$\frac{n+4}{3} \geqq n-p+1; \quad \text{d'où} \quad p \geqq \frac{2n-1}{3}, \quad n \leqq \frac{3p+1}{2}.$$

On a donc le corollaire suivant :

Si le groupe G, primitif et de degré n, contient une substitution circulaire de degré p, il sera symétrique ou alterné, dès que n ne dépassera pas la limite $\frac{3p+1}{2}$.

Ces propositions sont fort utiles dans les applications (*voir* l'ouvrage cité, n° **447** et Note C); il y a donc quelque intérêt à montrer qu'elles

peuvent être considérablement généralisées. Ce sera l'objet des pages suivantes.

2. Théorème I. — *Si un groupe* G, *primitif et de degré n, contient un groupe* Γ *dont les substitutions ne déplacent que p lettres et les permutent transitivement (p étant un entier quelconque), il sera au moins $n - p - 2q + 3$ fois primitif, q étant le plus grand diviseur de p tel, que l'on puisse répartir les lettres de* Γ *de deux manières différentes en systèmes de q lettres jouissant de la propriété que chaque substitution de* Γ *remplace les lettres de chaque système par celles d'un même système.*

Si aucun des diviseurs de p ne jouit de cette propriété (ce qui arrivera notamment si Γ *est primitif, ou formé des puissances d'une seule substitution circulaire),* G *sera $n - p + 1$ fois transitif.*

Démonstration. — Si $n = p$, G étant primitif, et *a fortiori* transitif, ce théorème sera évident.

Supposons, au contraire, $p < n$. Soit H le groupe formé par celles des substitutions de G qui ne déplacent que les p lettres de Γ. Le groupe Γ étant transitif par rapport à ces lettres, H, qui le contient, le sera *a fortiori*. On pourra d'ailleurs partager les lettres de G en deux catégories, contenant, la première, les p lettres $a, b, \ldots$ que H déplace, la seconde, les $n - p$ lettres restantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Soient H, $H_1, \ldots$ les groupes transformés de H par les diverses substitutions de G. Le groupe $(H, H_1, \ldots)$, dérivé de leur combinaison, sera évidemment permutable à toutes les substitutions de G, et il faudra qu'il soit transitif pour que G soit primitif (*Traité des substitutions*, n° 55). Or chacun des groupes H, $H_1, \ldots$ ne déplace que p lettres; et, pour que $(H, H_1, \ldots)$ soit transitif, il faudra évidemment que l'un au moins de ces groupes permute ensemble des lettres appartenant aux deux catégories $a, b, \ldots$ et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Parmi les groupes de la suite H, $H_1, \ldots$ qui déplacent ainsi des lettres des deux catégories, soit H_1 l'un de ceux qui déplacent le nombre *minimum* de lettres de la seconde catégorie. Soient $\alpha, \beta, \ldots$ ces lettres et q leur nombre. Le groupe H_1 les permutant avec quelques-unes des p lettres $a, b, \ldots$ que H permute entre elles transitive-

ment, il est clair que le groupe $I = (H, H_1)$ permutera transitivement les $p+q$ lettres $\alpha, \beta, \ldots, a, b, \ldots$.

3. Cela posé, soient $1, S_1, \ldots$ les diverses substitutions de I; $s, s_1, \ldots$ les divers systèmes de q lettres que ces substitutions font respectivement succéder à $\alpha, \beta, \ldots$; chacune des lettres $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ figurera, d'après ce qui précède, dans l'un au moins de ces systèmes; mais, d'autre part, deux de ces systèmes ne peuvent avoir aucune lettre commune, sans se confondre entièrement. Supposons, en effet, que s_1 et s_2 eussent q' lettres communes, q' étant $< q$: la substitution $S_1 S_2^{-1}$ remplacerait $\alpha, \beta, \ldots$ par un système de q lettres, parmi lesquelles q' seulement appartiendraient à la suite $\alpha, \beta, \ldots$, et le groupe transformé de H_1 par $S_1 S_2^{-1}$, lequel fait évidemment partie de la suite $H, H_1, \ldots$, ne différerait du groupe H que par $q - q'$ lettres, résultat contraire à l'hypothèse d'après laquelle q est minimum.

Les $p+q$ lettres $\alpha, \beta, \ldots, a, b, \ldots$ peuvent donc se grouper q à q en systèmes n'ayant aucune lettre commune. D'ailleurs chaque substitution de I remplace les lettres de chaque système par celles d'un même système. Soient, en effet, T une de ces substitutions, et t l'ensemble des lettres qu'elle fait succéder à celles de s_1; les lettres de t, succédant à $\alpha, \beta, \ldots$ en vertu de la substitution $S_1 T$, appartiendront, par définition, à un même système.

Les substitutions de I, permutant transitivement les lettres $\alpha, \beta, \ldots, a, b, \ldots$ permutent *a fortiori* transitivement les systèmes $s, s_1, \ldots$. L'un de ces systèmes s étant d'ailleurs amené à une place quelconque, les substitutions de H, qui permutent transitivement les p lettres restantes, permuteront *a fortiori* transitivement les $\frac{p}{q}$ systèmes correspondants. Donc I est doublement transitif par rapport aux systèmes.

4. Deux cas seront ici à distinguer, suivant que le nombre q est supérieur ou égal à l'unité. Nous supposerons, en premier lieu, $q > 1$.

On aura, dans ce cas, $n > p + q$. Soit, en effet, $n = p + q$. Le groupe G, étant primitif, contiendra une substitution T qui ne remplace pas les lettres de chaque système par celles d'un même système. Supposons, par exemple, que T remplace les q lettres du système s_1

par de nouvelles lettres parmi lesquelles il y en ait un nombre $q' < q$ appartenant au système s_2. La substitution $S_1 T S_2^{-1} = U$ remplacera α, $\beta, \ldots$ par un système de q lettres parmi lesquelles q' appartiennent à la suite $\alpha, \beta, \ldots$; et le groupe transformé de H par U, lequel appartient à la suite $H, H_1, \ldots$, ne différera de H que par $q - q'$ lettres, résultat inadmissible.

5. Soit donc $n > p + q$. On pourra partager les lettres de G en deux catégories, formées, la première, des $p + q$ lettres que I déplace; la seconde, des lettres restantes. Puis, raisonnant sur I comme tout à l'heure sur H, on verra que, parmi les groupes $I, I_1, \ldots$, transformés de I par les diverses substitutions de G, il en existe au moins un qui permute ensemble des lettres de catégorie différente. Parmi les groupes qui jouissent de cette propriété, soit I_1 l'un de ceux qui déplacent le nombre *minimum* de lettres de la seconde catégorie. Soient $\alpha', \ldots$ ces lettres, et r leur nombre. Le groupe $J = (I, I_1)$ déplacera $p + q + r$ lettres, qu'il permute transitivement, et qu'on pourra grouper r à r en systèmes $\sigma, \sigma_1, \ldots$ tels, que chaque substitution de J remplace les lettres d'un même système par celles d'un même système; l'un de ces nouveaux systèmes sera formé des lettres $\alpha', \ldots$; enfin J sera doublement transitif par rapport à ces systèmes.

Considérons les $\frac{p+q}{r}$ nouveaux systèmes formés par les lettres que I déplace. L'un quelconque d'entre eux, σ_1, sera contenu en entier dans l'un des anciens systèmes $s, s_1, \ldots$, entre lesquels ces mêmes lettres se répartissaient q à q. Soient, en effet, $\alpha\beta, \ldots, a_1 b_1 \ldots a_2 b_2 \ldots, \ldots$ ces anciens systèmes; supposons que σ_1 contînt deux lettres a_1, a_2 appartenant respectivement à s_1 et à s_2, et voyons ce qui en résulterait. Le groupe $I = (H, H_1)$ contient le groupe H', transformé de H par S_1, lequel laisse immobiles les lettres de s_1 et permute transitivement les autres. Les substitutions de H', laissant immobile une des lettres a_1 du système σ_1, ne déplaceront pas ce système. Donc les p lettres α, $\beta, \ldots, a_2, b_2, \ldots$ qu'elles font succéder à a_2 appartiendront à σ_1; on voit de même que $a_1, b_1, \ldots$ lui appartiendront. Le nombre r des lettres de chaque système sera donc au moins égal à $p + q$, ce qui est absurde; car ce nombre est égal à celui des lettres $\alpha', \ldots$, c'est-à-dire

à $p+q-\rho$, ρ étant le nombre des lettres de la première catégorie que I_1 déplace.

Soit μ le nombre des systèmes de la suite $\sigma, \sigma_1, \ldots$ qui se trouvent ainsi contenus dans chacun des systèmes $s, s_1, \ldots$; on aura évidemment $q=\mu r$, et nous aurons deux cas à distinguer, suivant que μ est supérieur ou égal à l'unité.

6. Supposons d'abord $\mu > 1$. Soient $\sigma, \sigma', \ldots, \sigma^{\mu-1}$; $\sigma_1, \sigma'_1, \ldots, \sigma_1^{\mu-1}$; ... les nouveaux systèmes dont la réunion forme respectivement $s, s_1, \ldots$; τ le dernier nouveau système formé par les lettres $a', \ldots$. Le groupe J, étant doublement transitif par rapport à ces systèmes, contiendra une substitution T qui remplace σ par τ, et réciproquement. Les systèmes $\tau', \ldots, \tau^{\mu-1}$; $\tau_1, \tau'_1, \ldots, \tau_1^{\mu-1}$; ... que T fait succéder à $\sigma', \ldots, \sigma^{\mu-1}$; $\sigma_1, \sigma'_1, \ldots, \sigma_1^{\mu-1}$; ... se confondront, à l'ordre près, avec ces derniers.

Or le groupe H déplace tous les systèmes, sauf $\tau, \sigma, \sigma', \ldots, \sigma^{\mu-1}$; son transformé H' par T déplace tous les systèmes, sauf $\sigma, \tau, \tau', \ldots, \tau^{\mu-1}$. Le nombre des lettres déplacées par H' sans l'être par H sera donc égal à λr, λ étant le nombre des systèmes contenus dans la suite $\sigma', \ldots, \sigma^{\mu-1}$ sans l'être dans la suite $\tau', \ldots, \tau^{\mu-1}$, lequel est au plus égal à $\mu-1$. Mais, par hypothèse, tous les groupes transformés de H par les substitutions de G qui ne se confondent pas avec lui en diffèrent au moins par $q=\mu r$ lettres. Donc $\lambda=0$, et H' *se confond avec* H.

D'autre part, désignons par $t_1, t_2, \ldots$ les systèmes de q lettres que T fait succéder à $s_1, s_2, \ldots$. Il est clair que les lettres de chacun de ces systèmes seront remplacées par celles d'un même système dans chacune des substitutions du groupe H' = H. Donc *il existera deux modes de grouper les lettres de* H *en systèmes de q lettres,* de telle sorte que les substitutions de H, et *a fortiori* celles de Γ, remplacent les lettres de chaque système par celles d'un même système.

Ces deux modes de groupement seront essentiellement distincts. Supposons, en effet, qu'ils fussent identiques, et que les lettres de t_1, autrement dit celles des systèmes $\tau_1, \ldots, \tau_1^{\mu-1}$, se confondissent avec celles de s_2, par exemple. La substitution $S_1TS_2^{-1}$ transformerait H en un groupe analogue H'', déplaçant toutes les lettres, sauf celles de s et celles que S_2^{-1} fait succéder à celles de σ, lesquelles sont en nombre r,

et font partie de s_2. Donc H'' ne différerait de H que par r lettres, nombre inférieur à $\mu r = q$, ce qui est contre l'hypothèse.

7. Supposons maintenant $\mu = 1$. Les $p + 2q$ lettres de J se grouperont en $\frac{p}{q} + 2$ systèmes, par rapport auxquels J sera trois fois transitif; car ses substitutions permettent de faire arriver le système σ à la place de l'un quelconque des autres systèmes $s, s_1, \ldots$, après quoi les substitutions de I, qui ne déplacent pas σ, permuteront ces derniers systèmes d'une manière deux fois transitive.

Cela posé, on verra, comme tout à l'heure, que $n > p + 2q$, et l'on partagera les lettres en deux catégories, formées respectivement des lettres que J déplace et de celles que J ne déplace pas. Parmi les groupes $J, J_1, \ldots$, transformés de J par les substitutions de G, il en existera qui permutent ensemble des lettres de catégorie différente. Parmi ces derniers groupes, soit J_1 l'un de ceux qui déplacent le nombre minimum r' de lettres de seconde catégorie. On trouvera, comme tout à l'heure, que les lettres du groupe $K = (J, J_1)$ se groupent r' à r' en systèmes; qu'on a $q = \mu' r'$, μ' étant le nombre des nouveaux systèmes dont la réunion forme chacun des anciens systèmes de q lettres $s, s_1, \ldots, \sigma$; et enfin que si $\mu' > 1$, les lettres de I pourront être groupées de deux manières distinctes en systèmes de q lettres.

Or I est deux fois transitif par rapport aux systèmes de q lettres s, $s_1, \ldots$ qu'il contient. Si donc ses lettres sont susceptibles de divers groupements en systèmes, chacun des nouveaux systèmes sera contenu en entier dans l'un des systèmes $s, s_1, \ldots$ (5). Donc il n'existe pas deux modes distincts de grouper les lettres de I en systèmes de q lettres. Donc $\mu' = 1$, et K contiendra $p + 3q$ lettres.

Continuant ce raisonnement, on aura successivement

$$n > p + 3q > p + 4q, \ldots$$

jusqu'à l'infini, ce qui est absurde.

Donc μ *ne peut se réduire à l'unité*.

8. Revenons donc à l'hypothèse $\mu > 1$. Si $r > 1$, on pourra raisonner sur I et J comme on l'avait fait sur H et I, de manière à établir que G contient un groupe K, déplaçant $p + q + r + s$ lettres (s étant

un sous-multiple de r), qu'il permute transitivement, et qui se groupent s à s en systèmes, par rapport auxquels K est deux fois transitif.

Si $s > 1$, on continuera de même, et l'on arrivera enfin à démontrer que G contient un groupe $\mathfrak{J}$ où chaque système ne contiendra plus qu'une seule lettre, et qui, par suite, sera deux fois transitif.

Soit d'ailleurs α le nombre des facteurs premiers de q. Le nombre $P = p + q + r + \ldots + 1$ des lettres déplacées par $\mathfrak{J}$ sera au plus égal à $p + q\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^\alpha}\right) \overline{\overline{<}}\, p + 2q - 1$.

9. Cela posé, si $n = P$, $\mathfrak{J}$ étant deux fois transitif, G le sera *a fortiori*, et le théorème sera démontré. Si $n > P$, on partagera les lettres de G en deux catégories, formées l'une des lettres que $\mathfrak{J}$ déplace, l'autre des lettres restantes. Parmi les groupes transformés de $\mathfrak{J}$ par les substitutions de G, et qui déplacent des lettres des deux catégories, soit $\mathfrak{J}_1$ l'un de ceux qui déplacent le moindre nombre u de lettres de seconde catégorie. Les lettres de $\mathfrak{J}$ pourront être groupées en systèmes u à u (**5**). Mais $\mathfrak{J}$, étant doublement transitif, sera évidemment primitif; donc u se réduit à l'unité, et le groupe $\mathfrak{J} = (\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_1)$ déplacera $P + 1$ lettres, par rapport auxquelles il sera trois fois transitif. Si $n = P + 1$, G sera *a fortiori* trois fois transitif. Si $n > P + 1$, on verra de même que G contient un groupe $\mathfrak{X}$ déplaçant $P + 2$ lettres, par rapport auxquelles il sera quatre fois transitif, etc. Donc enfin G sera $n - P + 2$ fois transitif, ce qui démontre le théorème.

10. Nous avons supposé jusqu'à présent $q > 1$, ce qui suppose qu'il existe deux modes différents de répartir les lettres de H en systèmes de q lettres (**6**). Si l'on avait, au contraire, $q = 1$, I serait deux fois transitif par rapport aux $p + 1$ lettres qu'il déplace, et le raisonnement du numéro précédent serait applicable en y remplaçant P par $p + 1$. Donc G sera $n - p + 1$ fois transitif.

11. Corollaire. — *Si G n'est pas symétrique ou alterné, son degré n sera limité.* En effet, G ne peut être plus de $\frac{n+4}{3}$ fois transitif. On aura donc l'inégalité

$$\frac{n+4}{3} \overline{\overline{>}}\, n - p - 2q + 3; \quad \text{d'où} \quad n \overline{\overline{<}}\, \frac{3p + 6q - 5}{2} < 3p - 2.$$

en remarquant que q est un sous-multiple de p, au plus égal à $\frac{p}{2}$. Si q se réduit à l'unité, on aura $n \overline{\gtrless} \frac{3p+1}{2}$.

12. Théorème II. — *Soit* A *une substitution quelconque, déplaçant* N *lettres. Un groupe primitif* G, *contenant la substitution* A, *sera nécessairement symétrique ou alterné, dès que son degré atteindra une certaine limite* Λ.

On peut supposer dans la démonstration de ce théorème que G ne contient aucune substitution qui déplace moins de N lettres. On peut admettre, en outre, que A est d'ordre premier p; car parmi les puissances de A, il en est une d'ordre premier, que G contiendra s'il contient A. On aura dans cette hypothèse $N = pl$, l étant le nombre des cycles de A.

Si A ne déplace que deux ou trois lettres, G sera symétrique ou alterné, et le théorème sera évident. Supposons qu'il reste vrai tant que A déplacera moins de N lettres. Soient L_1, L_2, ... les limites correspondantes aux diverses formes que pourrait revêtir dans cette hypothèse la substitution A; L le plus grand des entiers L_1, L_2, ..., $5N+4$. Nous allons démontrer que le théorème sera vrai si A déplace N lettres, et que G sera symétrique ou alterné, dès que son degré atteindra la limite $\Lambda = 3(Le-p)(N-1)+1$, e étant le plus grand entier contenu dans $\frac{N}{2}$.

D'après le n° **11**, il nous suffira pour cela d'établir la proposition suivante :

Lemme. — *Le groupe* G *contient un groupe* Γ, *qui ne déplace pas plus de* $(Le-p)(N-1)+1$ *lettres, et les permute transitivement.*

13. Les N lettres que A déplace peuvent se répartir en l classes, en groupant ensemble les p lettres que les puissances de A permutent entre elles. Soit C l'une quelconque de ces classes. Parmi les substitutions A, A_1, A_2, ... transformées de A par les substitutions de G, il en existe au moins une A_1 qui ne permute pas exclusivement entre elles les lettres de C, sans quoi, le groupe $(A, A_1, A_2, \ldots)$ n'étant pas transitif, le groupe G, qui lui est permutable, ne serait pas primitif.

Cela posé, A_1 déplaçant N lettres, dont une au moins était déjà déplacée par A, le nombre des lettres déplacées par les substitutions du groupe (A, A_1) sera au plus égal à $2N - 1$. Répartissons ces lettres en classes, en groupant ensemble celles que les substitutions de (A, A_1) permutent entre elles. Les lettres de C appartiendront évidemment à une même classe C_1, laquelle contiendra également les lettres que A_1 leur fait succéder, et dont une au moins, par hypothèse, ne faisait pas partie de C. Donc le nombre p_1 des lettres de C_1 ne pourra être $< p + 1$ ni $> 2N - 1$.

Le nombre des lettres de G, étant supposé égal ou supérieur à A, sera $> p_1$; et pour que G soit primitif il faudra que la suite $A_2, \ldots$ contienne au moins une substitution A_2 qui ne permute pas exclusivement entre elles les lettres de C_1. Le groupe (A, A_1, A_2) déplacera au plus $3N - 2$ lettres, qu'on pourra répartir en classes, en groupant ensemble celles que (A, A_1, A_2) permute entre elles; et celles de ces classes, C_2, qui contient C_3, contient un nombre de lettres p_2 au moins égal à $p + 2$, au plus égal à $3N - 2$.

Le nombre des lettres de G est $> p_2$; et continuant ainsi, on arrivera à montrer que G contient un groupe $H = (A, A_1, \ldots, A_{Le-p})$ déplaçant au plus $(Le - p)(N - 1) + 1$ lettres, qui pourront être groupées en classes, dont l'une C_{Le-p} contiendra au moins Le lettres.

S'il n'y a qu'une classe, notre lemme sera démontré, car H satisfera aux conditions que l'énoncé impose au groupe Γ.

14. Admettons donc qu'il y ait plusieurs classes. Chacune des substitutions de H est le produit de substitutions partielles permutant respectivement les lettres de chacune d'elles. Soit H_ρ le groupe formé par celles de ces substitutions partielles qui déplacent les lettres de la $\rho^{ième}$ classe, et soit m_ρ le nombre des lettres de cette classe. On pourra les répartir en systèmes tels, que chaque substitution de H_ρ remplace les lettres de chaque système par celles d'un même système. (Si H_ρ était primitif, chaque système se réduirait à une lettre.) S'il existe divers modes de répartition, adoptons l'un de ceux où le nombre k_ρ des lettres de chaque système est maximum. Les déplacements d'ensemble opérés sur ces systèmes par les substitutions de H_ρ formeront un groupe primitif K_ρ, car sans cela on pourrait grouper ces systèmes

en systèmes plus généraux et moins nombreux, contrairement à l'hypothèse.

Chaque système contiendra au plus e lettres. — En effet, parmi les substitutions $A, A_1, \ldots, A_{Le-p}$, il en existe une au moins qui permute les systèmes de la classe ρ. Elle déplacera au moins deux systèmes, dont elle déplacera toutes les lettres; mais elle ne déplace en tout que N lettres. Donc k_ρ est au plus égal à $\frac{N}{2}$, et comme il est entier, il sera au plus égal à e.

Cela posé, si l'une des substitutions $A, A_1, \ldots, A_{Le-p}$, par exemple A_1, déplace N systèmes, chacun d'eux ne contiendra qu'une lettre, et le groupe H_ρ, se confondant avec K_ρ, sera primitif. Le groupe Γ, dérivé de A_1 et de ses transformées par les substitutions de H_ρ (ou, ce qui revient au même, par celles de H), étant permutable aux substitutions de H_ρ, sera transitif par rapport aux m_ρ lettres qu'il déplace (*Traité des Substitutions*, n° 55); et comme $m_\rho < (Le - p)(N - 1) + 1$, le lemme sera démontré.

15. Supposons, au contraire, que celles des substitutions de la suite $A, A_1, \ldots, A_{Le-p}$ qui déplacent les systèmes de H_ρ déplacent chacune moins de N systèmes, et cela, pour toutes les valeurs de l'indice ρ. Si le nombre q_ρ de ces systèmes atteint ou dépasse L, le groupe K_ρ, étant primitif, et contenant des substitutions qui déplacent moins de N systèmes, sera symétrique ou alterné, par hypothèse (**11**). Cette circonstance se présentera pour une valeur au moins de ρ, puisqu'il existe une classe contenant au moins Le lettres, et que chaque système n'en peut contenir plus de e.

16. Soit q le plus grand des nombres $q_1, q_2, \ldots$, et supposons, pour fixer les idées, que $q_1, \ldots, q_\beta$ soient égaux, et $q_{\beta+1}, \ldots$ inférieurs à q. Soit enfin I un groupe aussi général que possible parmi ceux qui sont contenus dans H et satisfont à la double condition suivante :

1° Faire subir aux systèmes de l'une au moins des β premières classes (par exemple à ceux de la classe ρ) un ensemble de déplacements dont la combinaison forme un groupe i_ρ symétrique ou alterné;

2° Subsidiairement, déplacer le moins de lettres possible.

Le groupe I, ainsi défini, existera toujours, car, à défaut de groupe déplaçant moins de lettres, on aurait toujours le groupe H, qui satisfait à la première condition. Il jouira de propriétés importantes, que nous allons développer.

17. Soient S, S',... les substitutions de I; s_σ, s'_σ,... les déplacements qu'elles font subir aux systèmes de l'une quelconque σ des classes dont elles déplacent les lettres.

A deux substitutions distinctes de la suite s_ρ, s'_ρ,... correspondront toujours deux substitutions distinctes dans la suite s_σ, s'_σ,....

Supposons, en effet, qu'on ait $s_\sigma = s'_\sigma$, sans avoir $s_\rho = s'_\rho$. La substitution $S'S^{-1} = T$ ne déplace pas les systèmes de la classe σ, et fait subir à ceux de la classe ρ le déplacement $s'_\rho s_\rho^{-1} = t_\rho$. Les transformées de T par les substitutions de I forment un groupe J dont les substitutions ne déplaceront pas les systèmes de la classe σ et feront subir à ceux de la classe ρ des déplacements qui seront les transformés de t_ρ par s_ρ, s'_ρ,... et formeront un groupe j_ρ, contenu dans i_ρ et permutable à ses substitutions. Mais i_ρ est symétrique ou alterné; donc j_ρ le sera également (*Traité des Substitutions*, nos **81** et **85**).

La suite t_ρ, t'_ρ,... des déplacements que les substitutions T, T',... de J font subir aux systèmes de la classe ρ contiendra donc $1.2...q$ ou $\frac{1.2...q}{2}$ termes distincts. Soit, d'autre part, α l'une des lettres de la classe σ, qui soit déplacée par les substitutions de I. Les substitutions T, T',... permutent exclusivement ensemble les lettres, en nombre $k_\sigma \overline{\gtrless} e$, qui appartiennent au même système que α. La suite θ, θ',... des déplacements que ces lettres éprouvent par les substitutions T, T',... contient donc au plus $1.2...k_\sigma$ termes distincts, nombre inférieur à $\frac{1.2...q}{2}$. On pourra donc trouver dans cette suite deux termes θ et θ' semblables entre eux et correspondant à des termes différents t_ρ et t'_ρ. Raisonnant alors comme précédemment, on voit que $T'T^{-1} = U$ et ses transformées par les substitutions de J forment un groupe contenu dans J et *a fortiori* dans I, qui satisfera encore à la première condition imposée à I, quoique ne déplaçant plus la lettre α; résultat inadmissible, vu la seconde condition à laquelle I est censé satisfaire.

18. *Les seules lettres que* I *puisse déplacer sont celles des* β *premières classes.* — Car si l'on avait $\sigma > \beta$, d'où $q_\sigma < q$, le nombre des substitutions distinctes de la suite $s_\sigma, s'_\sigma, \ldots$, lequel divise $1.2\ldots q_\sigma$, serait $< \frac{1.2\ldots q}{2}$, ce qui est inadmissible, d'après le numéro précédent.

On aura donc $\sigma \overline{\gtrless} \beta$. Il faut d'ailleurs que le groupe $i_\sigma = (s_\sigma, s'_\sigma, \ldots)$ contienne autant de substitutions que le groupe i_ρ. Donc, si i_ρ est symétrique, i_σ le sera; d'ailleurs la réciproque est vraie, car on peut échanger ρ et σ dans le raisonnement. Si au contraire i_ρ est alterné, i_σ le sera.

19. Soient $a_\rho, b_\rho, \ldots$ les q systèmes de la classe ρ; I_a le groupe formé par celles des substitutions de I qui laissent immobile le système a_ρ; ces substitutions font subir aux systèmes $b_\rho, \ldots$ des déplacements formant un groupe $i_{\rho a}$ d'ordre $1.2\ldots(q-1)$ ou $\frac{1.2\ldots(q-1)}{2}$, suivant que I_ρ est symétrique ou alterné. Les déplacements effectués par les mêmes substitutions sur les q systèmes de la classe σ formeront un groupe $i_{\sigma a}$ d'ordre $1.2\ldots(q-1)$ $\left[\text{ou } \frac{1.2\ldots(q-1)}{2}\right]$. Or M. Bertrand a montré qu'un groupe ne peut avoir cet ordre que s'il est symétrique (ou alterné) par rapport à $q-1$ de ces systèmes. Donc les substitutions de $i_{\sigma a}$ laissent immobile un des systèmes de la classe σ; soit a_σ ce système.

Soit de même I_b le groupe formé par celles des substitutions de I qui laissent immobile le système b_ρ; elles laisseront immobile un des systèmes de la classe σ, que nous appellerons b_σ, etc.

Cela posé, *chaque substitution* S *du groupe* H *est permutable à* I, *et déplace les systèmes* $a_\sigma, b_\sigma, \ldots$ *de la même manière que les systèmes correspondants* $a_\rho, b_\rho, \ldots$. En effet, soit I' le groupe transformé de I par S. Si I' différait de I, le groupe (I, I') serait plus général que I, bien que déplaçant les mêmes lettres, et jouissant des mêmes propriétés caractéristiques, résultat contraire à notre hypothèse. Donc S est permutable à I. Supposons d'ailleurs que S remplace a_ρ par b_ρ, et a_σ par un système x. Il est clair que S transformera I_a en I_b, dont les substitutions laissent immobile le système b_σ; mais, d'autre part,

I_a laissant a_σ immobile, le système que son transformé laisse immobile sera x. Donc $x = b_\sigma$, ce qu'il fallait démontrer.

Soit $\gamma \overline{\overline{<}} \beta$ le nombre des classes ρ, σ,... dont I déplace les lettres. Il est permis de supposer que ces classes sont les γ premières.

20. Nous allons maintenant établir la proposition suivante :

Si l'un des entiers $k_1, \ldots, k_\gamma$, par exemple k_1, est plus grand que l'unité, H *contiendra une substitution* X, *qui déplace moins de* 2N *lettres, et qui déplace les lettres d'un système appartenant à l'une des γ premières classes, tout en laissant ce système immobile.*

Dans ce but, nous observerons que, parmi les substitutions A, $A_1, \ldots, A_{Le-p}$ dont H est dérivé, il en existe une au moins A qui déplace quelques-uns des systèmes de la première classe. Soit r le nombre de ces systèmes qu'elle déplace; elle déplacera d'une manière analogue les systèmes correspondants de chacune des γ premières classes. Ces systèmes contiennent en tout $r(k_1 + \ldots + k_\gamma)$ lettres, que A déplace toutes. Mais elle déplace en tout N lettres. Donc on aura $N \overline{\overline{>}} r(k_1 + \ldots + k_\gamma)$, suivant que A déplace ou non d'autres lettres que celles-là.

Si elle en déplace d'autres, on peut admettre qu'elles appartiennent aux classes $\gamma + 1, \ldots$. Car si l'une d'elles appartenait à l'une des γ premières classes, A laissant immobile son système satisferait à toutes les conditions imposées à X, et notre proposition se trouverait démontrée dès l'abord.

On a d'ailleurs $q > N + 1 > r + 1$. Donc il existe dans la première classe deux systèmes au moins x_1, y_1, que A ne déplace pas. Soient, au contraire, a_1, b_1,... ceux qu'elle déplace. Le groupe I, permutant les systèmes de la première classe d'une manière symétrique ou alternée, contiendra une substitution B qui permute circulairement les trois systèmes a_1, x_1, y_1, sans déplacer les autres systèmes de cette classe; H contiendra la substitution $B^{-1}AB$, transformée de A par B, laquelle déplace N lettres, parmi lesquelles celles de $b_1, \ldots$, et déplace les lettres des classes $\gamma + 1, \ldots$ de la même manière que A; il contiendra également la substitution $U = A^{-1}B^{-1}AB$, laquelle déplace moins de 2N lettres, appartenant toutes aux γ premières classes, et laisse

immobiles tous les systèmes de la première classe, sauf a_1, x_1, b_1 qu'elle permute circulairement. Elle déplace d'ailleurs de la même manière les systèmes correspondants de chacune des γ premières classes; et, par suite, elle déplacera au moins $3(k_1 + \ldots + k_\gamma) = N'$ lettres. Si elle en déplace d'autres, ce sera sans déplacer les systèmes auxquels elles appartiennent, et par suite U satisfera à toutes les conditions que l'énoncé impose à la substitution X dont nous voulons prouver l'existence.

Admettons, au contraire, que U ne déplace que N' lettres; ce nombre ne pouvant être inférieur à N, par hypothèse, r se réduira à 2 ou à 3.

21. Supposons, par exemple, que $r = 3$; et soient a_1, b_1, c_1 les trois systèmes de la première classe que A permute entre eux; on pourra évidemment établir entre les lettres de ces trois systèmes une correspondance telle, que A fasse succéder à chaque lettre de a_1 sa correspondante du système b_1, et à celle-ci sa correspondante du système c_1. D'ailleurs A^p se réduisant à l'unité ne déplace aucun système; donc p est un multiple de 3, et comme il est premier, il se réduira à 3; donc $A^3 = 1$, et par suite A remplacera chaque lettre de c_1 par sa correspondante de a_1.

Cela posé, I étant alterné, et *a fortiori* trois fois transitif par rapport aux systèmes a_1, b_1, c_1,... de la première classe, contient une substitution C qui remplace les systèmes a_1, b_1, c_1 par les systèmes b_1, c_1, d_1; et H contiendra la substitution $A' = C^{-1}AC$, qui permute circulairement les trois systèmes b_1, c_1, d_1. Si A' ne remplace pas chaque lettre de b_1 par sa correspondante de c_1, H contiendra la substitution $A'A^{-1}$, laquelle satisfera aux conditions imposées à X, car elle déplace moins de 2N lettres et permute ensemble les lettres de b_1. Dans le cas contraire, on pourra faire correspondre à chaque lettre de c_1 celle des lettres de d_1 que A' lui fait succéder, et que A' remplacera elle-même par sa correspondante de b_1. On verra de même (en continuant à exclure les hypothèses desquelles résulte l'existence de la substitution cherchée X) que H contient une substitution A'' qui permute les trois systèmes c_1, d_1, e_1 en remplaçant les unes par les autres les lettres correspondantes, etc. Des substitutions A, A', A'',...

combinées ensemble, on déduira par une suite de transformations une substitution $\mathcal{A}$ qui permute entre eux trois systèmes quelconques de la première classe, x_1, y_1, z_1, en remplaçant les unes par les autres les lettres correspondantes. D'ailleurs A, A′, A″,.., $\mathcal{A}$, étant les transformées successives d'une même substitution A, déplaceront chacune N lettres.

Cela posé, H permutant transitivement les lettres de la première classe, l'une au moins des substitutions A, A_1,... de degré N dont il est dérivé, déplacera quelqu'une de ces lettres sans lui faire succéder une de ses correspondantes. Si cette substitution A_1 ne déplace pas le système x_1 auquel cette lettre appartient, elle satisfera aux conditions imposées à X. Si au contraire elle fait succéder le système x_1 au système y_1, H contiendra $A_1 \mathcal{A}^{-1}$ qui satisfait à ces conditions.

Si l'on avait $r = 2$, la démonstration serait la même.

22. L'existence de la substitution X étant ainsi démontrée, formons avec les systèmes des γ premières classes le tableau suivant :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & \dots & f_1 & g_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & \dots & f_2 & g_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_\gamma & b_\gamma & \dots & f_\gamma & g_\gamma & \dots \end{array}\right.$$

Les lettres déplacées par X, et *a fortiori* celles de ces lettres qui appartiennent aux γ premières classes sont en nombre inférieur à $2N$. Le nombre des colonnes distinctes du tableau (1) où figurent les systèmes dont ces lettres font partie sera *a fortiori* inférieur à $2N$. Supposons, pour fixer les idées, que ces lettres appartiennent toutes aux systèmes des premières colonnes $a, \dots, f$. Le nombre ν des colonnes suivantes $g, \dots$ sera supérieur à $q - 2N$. Soit, d'autre part, f_1 le système dont X déplace les lettres tout en laissant le système lui-même immobile.

Le groupe I, permutant d'une manière symétrique ou alternée les diverses colonnes de systèmes du tableau (1), contiendra un groupe partiel I′ dont les substitutions laissent immobiles les colonnes a,

$b, \ldots$, et permutent d'une manière symétrique ou alternée les colonnes $f, g, \ldots$.

23. Soit J un groupe aussi général que possible parmi ceux qui sont contenus dans I' et satisfont à la double condition suivante :

1° Permuter d'une manière symétrique ou alternée les colonnes $f, g, \ldots$;

2° Subsidiairement, déplacer le moins de lettres possible.

Nous allons démontrer que J laisse immobiles les lettres de tous les systèmes appartenant aux colonnes $a, b, \ldots$.

Supposons, en effet, que J déplace les lettres de a_1. Le nombre des positions distinctes que ses substitutions permettent d'assigner à ces lettres sera un diviseur de $1.2\ldots k_1$. Celui des déplacements différents que ces substitutions impriment aux $\nu+1$ colonnes $f, g, \ldots$ est un multiple de $\frac{1.2\ldots(\nu+1)}{2}$, nombre supérieur au précédent, car on a

$$\nu+1 > q-2N+1 > L-2N+1 > e > k_1.$$

Donc J contient deux substitutions s et s', qui permutent de même les lettres de a_1 sans permuter de même les colonnes $f, g, \ldots$; il contiendra la substitution $t = s^{-1}s'$ qui permute ces colonnes sans déplacer les lettres de a_1. Les transformées de t par les substitutions de J formeront évidemment un groupe J' dont les substitutions permuteront les colonnes $f, g, \ldots$ d'une manière symétrique ou alternée, sans déplacer les lettres de a_1, que J déplaçait, résultat inadmissible, comme contredisant la seconde propriété du groupe J.

24. Cela posé, J contient une substitution Y qui permute circulairement les trois colonnes f, g, h. Et il est clair que la substitution $Z = XY^{-1}X^{-1}Y$ ne déplace aucun système, et laisse immobiles toutes les lettres, sauf celles des colonnes f, g; qu'elle déplace les lettres de f de la même manière que X, et qu'elle déplace en outre celles des lettres de g que Y fait succéder à celles des lettres de f que X déplace. Le nombre des lettres déplacées par Z est donc au plus égal à $2(k_1 + \ldots + k_\gamma)$, nombre total des lettres des deux colonnes f, g. Mais il ne peut être moindre que $N \geqq r(k_1 + \ldots k_\gamma)$. Il faudra, pour que cela soit possible : 1° qu'on ait $r = 2$; 2° que N ne surpasse pas

$2(k_1 + \ldots + k_\gamma)$ et, par suite, que A ne déplace aucune lettre autre que celles des deux colonnes qu'elle permute entre elles; 3° que Z déplace toutes les lettres des colonnes f, g, et, par suite, que X déplace toutes celles de f.

Celles des substitutions de la suite $A, A_1, \ldots, A_{Le-p}$ qui déplacent les lettres des γ premières classes seront donc de deux sortes : 1° celles qui déplacent des systèmes; celles-là permuteront deux colonnes, et ne déplaceront aucune autre lettre; 2° celles qui ne déplacent pas de systèmes; celles-là déplaceront toutes les lettres d'une colonne dès qu'elles en déplacent une seule; elles déplaceront donc chacune les lettres de deux colonnes, ou celles d'une seule colonne avec des lettres des classes $\gamma + 1, \ldots$.

25. Soit A_{ab} une des substitutions de la première sorte, qui permute ensemble les colonnes a et b, par exemple. Les substitutions de I permutent les colonnes d'une manière alternée; donc parmi les transformées de A_{ab} par ces substitutions, il en existera une A_{bc} qui permute les colonnes b et c, une cd qui permute les colonnes c et d, etc. On pourra d'ailleurs établir entre les lettres de ces colonnes une correspondance telle, que chacune de ces substitutions échange entre elles les lettres correspondantes des systèmes qu'elle déplace (**21**). Ces substitutions $A_{ab}, A_{bc}, \ldots$, combinées ensemble par voie de transformation, fourniront une substitution A_{xy} permutant les lettres correspondantes de deux colonnes quelconques x, y.

Désignons maintenant par $B_a, B'_a, \ldots$ des substitutions opérées sur les lettres de la colonne a, par $B_b, B'_b, \ldots$ les substitutions analogues opérées sur les lettres correspondantes de b, etc., par $M, M', \ldots$ des substitutions qui ne déplacent pas les lettres des γ premières classes. Celles des substitutions de la suite $A, A_1, \ldots, A_{Le-p}$ qui déplacent les lettres de deux colonnes x et y seront évidemment de la forme $A_{xy}^\mu B_x B'_y$, μ étant égal à zéro ou à 1, suivant que la substitution considérée laisse les colonnes immobiles ou les permute entre elles; et celles qui ne déplacent les lettres que d'une colonne z seront de la forme MB''_z.

Cela posé, le groupe $H = (A, A_1, \ldots, A_{Le-p})$ étant transitif, celles de ses substitutions qui ne déplacent pas la colonne a permutent transitivement les lettres de chacun des systèmes $a_1, a_2, \ldots, a_\gamma$. *A fortiori*,

ces lettres seront permutées transitivement par les substitutions du groupe plus général $\mathfrak{S}$ dérivé des substitutions $A_{ab},\ldots, A_{xy},\ldots, B_a, B'_a, B''_a,\ldots, B_x, B'_x, B''_x,\ldots, M,\ldots$.

26. Nous pouvons maintenant établir la proposition suivante, but des développements précédents :

Le groupe $\mathfrak{Z}$ formé par celles des substitutions de I *qui ne déplacent que les lettres de deux colonnes a, b permute transitivement les lettres de chacun des systèmes $a_1, a_2,\ldots, b_1, b_2,\ldots$.*

Car I contient la substitution $A_{xy}^{-\mu}.A_{xy}^{\mu}B_xB'_y = B_xB'_y$ dont $\mathfrak{Z}$ contiendra les transformées $B_aB'_b$ et $B_bB'_a$ par les substitutions $A_{ax}A_{by}$ et $A_{ay}A_{bx}$ qui sont contenues dans I. De même $\mathfrak{Z}$ contiendra la substitution $A_{az}^{-1}MB''_zA_{az}.A_{bz}(MB''_z)^{-1}A_{bz}^{-1} = B''_aB''^{-1}_b$. Donc les substitutions de $\mathfrak{Z}$ font subir aux lettres de a les mêmes déplacements $B_a, B'_a, B''_a,\ldots$ que celles de $\mathfrak{S}$; donc elles permutent transitivement les lettres de chacun des systèmes $a_1, a_2,\ldots$. De même évidemment pour celles des systèmes $b_1, b_2,\ldots$.

27. Cela posé, les transformées $A, A_1,\ldots, A_{Le-p}, A_{Le-p+1},\ldots$ de A par les substitutions de G formant un groupe transitif, l'une d'elles au moins, A_{Le-p+1}, permutera les lettres de la première classe avec d'autres lettres, dont chacune pourra, soit appartenir à l'une des $\gamma-1$ autres classes de lettres que I déplace, soit n'être pas déplacée par I. Cette substitution, jointe à I, donnera un groupe H'. Réunissons dans une même classe toutes les lettres que ce dernier groupe permute entre elles. Ces nouvelles classes pourront être de deux sortes : 1° celles qui sont formées par les lettres d'une ou plusieurs des classes de I, jointes ou non à des lettres nouvelles, que I ne déplaçait pas; 2° celles qui sont formées exclusivement de lettres nouvelles. Ces dernières contiendront moins de N lettres, la substitution A_{Le-p+1} ne déplaçant en tout que N lettres, qui ne sont pas toutes nouvelles.

Considérons l'une quelconque $\mathfrak{C}$ des classes de la première sorte, et supposons-la formée des lettres des δ premières classes de I, jointes à m lettres nouvelles, m étant $< N$ et pouvant se réduire à zéro. Le groupe H'_1, formé par les déplacements que les substitutions de H' font subir aux lettres de $\mathfrak{C}$, pourra n'être pas primitif; mais, dans ce

cas, adoptons parmi les divers modes de répartition de ces lettres en systèmes celui où chaque système contient le nombre *maximum* de lettres, sans toutefois contenir toutes celles de $\mathfrak{S}$; le groupe K'_1 formé par les déplacements d'ensemble de ces systèmes sera primitif. D'ailleurs *les lettres de chacune des colonnes du tableau suivant*

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{llll} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_\delta & b_\delta & c_\delta & \ldots \end{array}\right.$$

formeront à elles seules un ou plusieurs systèmes.

Soient, en effet, α une quelconque des lettres d'un système a_1 appartenant à la colonne a, γ_ρ une lettre quelconque de l'un c_ρ des systèmes d'une autre colonne c, ε une lettre nouvelle; nous allons démontrer que α ne peut être contenu dans le même système que γ_ρ ou ε.

Si α était contenu dans le même système que γ_ρ, les substitutions de $\mathfrak{I}$, ne déplaçant pas γ_ρ, ne déplaceront pas ce système, et, comme elles permutent α avec toutes les lettres de a_1, ce système contiendra toutes ces lettres. D'autre part, un raisonnement identique à celui du n° 25 montre que I contient un groupe dont les substitutions laissent immobiles les lettres de la colonne c, et permutent les autres colonnes $a, b, d, \ldots$ d'une manière symétrique ou alternée. Ces substitutions, ne déplaçant pas γ_ρ, ne déplaceront pas son système; donc les lettres de $b_1, d_1, \ldots$, qu'elles font succéder à celles de a_1, appartiendront à ce système. De même, les substitutions de I qui permutent ensemble les colonnes $b, c, d, \ldots$ d'une manière symétrique ou alternée, sans déplacer les lettres de la colonne a, laisseront le système immobile, puisqu'elles ne déplacent pas a_1. Donc les lettres de c_1 qu'elles font succéder à celles de b_1 appartiennent à ce système. Ce système contiendra donc toutes les lettres de la première classe de I, en nombre qk_1. La substitution A_{Le-p+1}, ne déplaçant que N lettres, laissera invariables une partie de celles-là; donc elle ne déplacera pas le système considéré. De même pour les substitutions de I, qui permutent ensemble les lettres de la première classe de I. Donc aucune des sub-

stitutions de H′ ne déplacera ce système ; donc ce système contiendrait, contrairement à l'hypothèse, toutes les lettres de $\mathfrak{S}$, que H′ permute avec α.

Si α était contenu dans le même système que ε, ce système ne serait pas déplacé par les substitutions de I, qui ne déplacent pas ε; il contiendrait donc les lettres de la première classe de I, que ces substitutions permutent avec α; et l'on voit, comme tout à l'heure, qu'il contiendrait toutes les lettres de $\mathfrak{S}$.

Le nombre des lettres de chaque colonne étant $k_1 + \ldots + k_\delta$, sera au plus égal à $k_1 + \ldots + k_\gamma = \frac{N}{2} = e$. *Le nombre de lettres de chaque système sera donc au plus égal à e.*

Soient ζ le nombre des systèmes de $\mathfrak{S}$ formés par chacune des q colonnes $a, b, c, \ldots$; η le nombre des systèmes restants formés par les m lettres nouvelles; $\mathfrak{S}$ contiendra $q\zeta + \eta$ systèmes, nombre au moins égal à q.

28. Le nombre total des lettres déplacées par A_{Le-p+1} étant N, celles de ces lettres qui sont contenues dans les colonnes du tableau (2) ne pourront se trouver dans plus de N colonnes distinctes; et, l'ordre des colonnes étant indifférent, on peut admettre qu'elles se trouvent dans les $N + 1$ premières colonnes $a, b, \ldots, d$ du tableau (2). Un raisonnement identique à celui du n° **25** montrera d'ailleurs que I contient un groupe dont les substitutions permutent d'une manière symétrique ou alternée les $N + 1$ colonnes considérées sans déplacer les lettres des autres colonnes. Ce groupe, combiné avec $\mathfrak{H}$, donnera un groupe $\mathfrak{H}_1$, contenu dans I et permutant transitivement entre elles les lettres de $a_\rho, b_\rho, \ldots, d_\rho$ sans déplacer celles de $e_\rho, f_\rho, \ldots$ pour toute valeur de l'indice ρ comprise entre 1 et γ.

29. La substitution A_{Le-p+1} et ses puissances permutant ensemble des lettres qui appartiennent aux classes $1, \ldots, \delta$, et dont aucune n'appartient aux colonnes $e, f, \ldots$, jointes à des lettres nouvelles en nombre m, cette substitution, jointe à $\mathfrak{H}_1$, donnera un nouveau groupe Γ, permutant transitivement les lettres de $a_1, b_1, \ldots, d_1; \ldots; a_\delta, b_\delta, \ldots, d_\delta$ et les m lettres nouvelles sans déplacer les autres lettres

de $\mathfrak{C}$. *A fortiori*, les déplacements que ces substitutions font subir aux $(N+1)\zeta+\eta$ systèmes formés par ces lettres constituent un groupe transitif Δ.

Le groupe K'_1, contenant le groupe Δ, sera symétrique ou alterné (**44**) si l'on a la relation

$$q\zeta+\eta \overline{\gtrless} 3[(N+1)\zeta+\eta)]-2,$$

laquelle devient évidente, en remarquant que l'on a

$$\eta \overline{\lessgtr} m < N < N\zeta \quad \text{et} \quad q \overline{\gtrless} L > 5N+3.$$

Nous obtenons donc ce résultat :

Si dans chacune des classes de la première sorte on répartit les lettres en systèmes, on aura au moins q systèmes, que les substitutions de H′ *permuteront d'une manière symétrique ou alternée. Le nombre de lettres de chaque système ne pourra surpasser e.*

Considérons, au contraire, une classe de la seconde sorte. Le nombre des lettres qu'elle déplace sera inférieur à N, et par suite à q.

50. Cela posé, de même que du groupe H on a déduit le groupe I, on déduira de H′ un autre groupe I′, dont les substitutions ne déplacent que les lettres de celles des classes de première sorte où le nombre des systèmes est *maximum ;* ce groupe I′ jouira de toutes les propriétés de I.

On doit remarquer que les classes de I′, étant formées chacune des lettres d'une ou plusieurs classes de I, auxquelles peuvent s'ajouter des lettres nouvelles, seront en nombre au plus égal à celui de ces dernières classes. De plus, la première classe de I′ contient au moins une lettre de plus que la première de I. Si l'on admet, ce qui est permis, que parmi les classes de I la première est une de celles où le nombre des lettres est maximum, on voit que I′ contiendra au moins une classe où ce maximum sera dépassé.

Raisonnant sur I′ comme sur I, on en déduira un nouveau groupe I″, où le nombre des classes ne sera pas plus grand que dans I′, et où l'une d'elles sera plus nombreuse que la plus nombreuse de I′.

Poursuivant ainsi, comme le nombre de lettres de la classe la plus nombreuse s'accroît constamment, on arrivera enfin à un groupe I^v dans lequel cette classe contient toutes les lettres de G. Tous les raisonnements qui ont servi à établir les propriétés de I s'appliquent à chacun des groupes successifs $I', \ldots, I^v$. Donc chacun des systèmes a^v, $b^v, \ldots$ entre lesquels se répartissent les lettres de I^v contiendra au plus e lettres; et I^v contiendra un groupe $\mathfrak{I}^v_1$ dont les substitutions permutent transitivement les lettres des $N+1$ systèmes $a^v, b^v, \ldots, d^v$, sans déplacer les autres lettres. Ce groupe contenant au plus $(N+1)e$ lettres, nombre inférieur à $(Le-p)(N-1)+1$, notre théorème est démontré.

31. L'examen de chaque cas particulier permettra de resserrer considérablement la limite A résultant de la démonstration précédente. Pour en donner un exemple, nous allons examiner le cas où la substitution A est d'ordre premier impair p, et contient deux cycles.

Soit $A = (a_1 a_2 \ldots a_p)(b_1 b_2 \ldots b_p)$. Parmi les substitutions transformées de A par les substitutions de G, il en existe une au moins A′ qui ne permute pas exclusivement entre elles les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Ici divers cas seront à discuter.

32. *Premier cas.* — A′ ne déplace aucune des lettres $b_1, b_2, \ldots, b_p$. Si A′ ne déplace qu'une portion des lettres $a_1, a_2, \ldots, a_p$, la substitution $A'^{-1} A A' = B$ aura pour second cycle $b_1 b_2 \ldots b_p$, et son premier cycle sera formé d'une portion des lettres $a_1, a_2, \ldots, a_p$ jointes à des lettres nouvelles $\alpha, \ldots$. Soit ν le nombre de ces dernières lettres. Soient encore Γ le groupe (A, B), Δ le groupe formé par les déplacements que ces substitutions font subir aux lettres $a_1, \ldots, a_p, \alpha, \ldots$. Ce groupe Δ sera $\nu+1$ fois transitif (théorème I). Cela posé, celles des substitutions de Γ qui laissent immobiles les lettres $b_1, \ldots, b_p$ forment un groupe Γ' évidemment permutable à toutes les substitutions de Γ, ou, ce qui revient au même, à celles de Δ. Il sera donc au moins ν fois transitif. Le groupe formé par celles de ses substitutions qui ne déplacent que $p+1$ lettres sera donc transitif. Donc G, contenant un groupe transitif de degré $p+1$, aura son degré au plus égal à $3p+1$ (**11**).

Si A′ déplace toutes les lettres $a_1, \ldots, a_p$, deux au moins de ces lettres, telles que a_1 et a_2, appartiendront au même cycle de A′, lequel contiendra encore des lettres nouvelles $\alpha, \ldots$. Supposons que a_1 et a_2 se suivent de q rangs dans ce cycle. On prendra $B = A'^{-q} A A'^{q}$, et cette substitution jouira des mêmes propriétés qu'à l'alinéa précédent.

33. *Deuxième cas.* — A′ déplace au moins une lettre de chacun des cycles de A (et réciproquement). Supposons d'abord que l'un des cycles de A′ contienne deux lettres, a_1, b_1, appartenant à des cycles différents dans A, et admettons que ces deux lettres se suivent de q rangs dans le cycle considéré.

Si A′ déplace les mêmes lettres que A, G contiendra le groupe (A, A′) transitif et de degré $2p$.

Si A′ laisse immobile une des lettres de A, telle que a_ρ, le groupe (A, A′) sera transitif, et son degré égal à $2p + m$, m étant le nombre de lettres déplacées par A′ sans l'être par A.

On peut admettre que m est au plus égal à $p - 1$. Soit, en effet, $m > p - 1$. La substitution $A'' = A'^{-q} A A'^{q}$, qui contient dans un de ses cycles les deux lettres b_1 et a_ρ, peut être comparée à A de la même manière que l'était la substitution A′. D'ailleurs le nombre μ des lettres nouvelles qu'elle contient est égal au nombre des lettres appartenant à A que A'^{q} remplace par des lettres nouvelles, nombre qui ne peut évidemment pas dépasser $2p - m - 1$, et serait $\overline{\gtrless} p - 1$, si m était supérieur à ce nombre.

Donc G contiendra un groupe transitif, dont le degré ne dépassera pas $3p - 1$. Nous allons démontrer que, si ce groupe Γ n'est pas primitif, ses lettres ne pourront être réparties en systèmes que d'une seule manière; d'où cette conclusion que le degré de G ne peut dépasser $\frac{9p}{2} - 1$ (**11**).

Considérons, en effet, un groupement quelconque en systèmes. Si deux des lettres $a_1, \ldots, a_p$, telles que a_1 et a_ρ, appartenaient au même système, toutes y appartiendraient; car, la substitution A^ρ ne déplaçant pas ce système, les p lettres $a_1, a_\rho, a_{2\rho}, a_{3\rho}, \ldots$, qu'elle remplace les unes par les autres, feraient partie de ce système, que A ne déplace

pas. Cela posé, A′ laisserait immobiles quelques-unes des lettres ci-dessus ou contiendrait plusieurs de ces lettres dans un seul cycle. Dans l'un ou l'autre cas, elle ne déplacerait pas le système; donc toutes les substitutions de (A, A′) ne déplaceraient pas ce système, et, comme elles permutent transitivement les lettres, il n'y aurait qu'un système, contrairement à l'hypothèse.

D'autre part, si a_1 faisait partie du même système qu'une lettre α non déplacée par A, A ne déplacerait pas ce système, qui contiendrait par suite $a_1, a_2, \ldots, a_p$, ce qui est inadmissible. Donc le système qui contient a_1 ne contiendra qu'une autre lettre, prise dans le cycle $b_1 b_2 \ldots b_p$. Soit $b_{\sigma+1}$ cette lettre; A permutera transitivement p systèmes $a_1 b_{\sigma+1}$, $a_2 b_{\sigma+2}, \ldots, a_x b_{\sigma+x}$. D'après l'analogie des deux substitutions A, A′, il est clair que, si A′ contient dans l'un de ses cycles l'une des lettres a_x, $b_{\sigma+x}$, elle contiendra l'autre dans son autre cycle.

Supposons maintenant qu'il existe une seconde décomposition en systèmes, et soient $a_1 b_{\tau+1}, \ldots, a_x b_{\tau+x}, \ldots$ ceux de ces nouveaux systèmes qui sont formés par les lettres de A. La substitution A′, contenant a_1 dans son premier cycle, contiendra $b_{\tau+1}$ dans le second; donc elle contiendra $a_{\tau-\sigma+1}$ dans le premier, puis $b_{2\tau-\sigma+1}$ dans le second, etc. Donc $a_1, a_2, \ldots, a_p$ appartiendraient à son premier cycle, et $b_1, b_2, \ldots, b_p$ au second, ce qui est inadmissible, a_1 et b_1 appartenant au même cycle, par hypothèse.

54. Il nous reste à considérer le cas où la substitution A′ ne permet pas de permuter ensemble les lettres des deux cycles de A. Le premier cycle de A′ sera formé, dans cette hypothèse, des lettres $a_1, \ldots, a_p$, ou de quelques-unes seulement, jointes à de nouvelles lettres $a_{p+1}, \ldots, a_{p+q}$; son second cycle sera formé des lettres $b_1, \ldots, b_p$, ou d'une partie de ces lettres, jointes à de nouvelles lettres $b_{p+1}, \ldots, b_{p+r}$.

Parmi les transformées de A par les substitutions de G, il pourra en exister encore une A″, permutant, d'une part, les lettres $a_1, \ldots, a_{p+q}$ exclusivement entre elles, ou avec des lettres nouvelles $a_{p+q+1}, \ldots, a_{p+q+q'}$; d'autre part, les lettres $b_1, \ldots, b_{p+r}$ exclusivement entre elles, ou avec des lettres nouvelles $b_{p+r+1}, \ldots, b_{p+r+r'}$; puis une nouvelle substitution A‴ jouissant de propriétés analogues, etc. Tant que nous aurons de ces nouvelles substitutions, nous nous les adjoindrons, et

nous obtiendrons un groupe $H = (A, A', A'',, \ldots)$ dont les lettres forment deux catégories $a_1, \ldots, a_s$ et $b_1, \ldots, b_t$, en réunissant ensemble celles que H permute entre elles.

Cela posé, parmi les substitutions transformées de A par les substitutions de G, il existe une substitution au moins A_1 qui ne permute pas exclusivement ensemble les lettres $a_1, \ldots, a_s$.

Supposons qu'elle remplace a_σ, par exemple, par une lettre autre que celles de cette catégorie; a_σ est déplacé par l'une au moins des substitutions $A, A', A'', \ldots$, par exemple par A', dont le second cycle sera formé de lettres de la catégorie b. Si A_1 ne déplaçait aucune de ces dernières lettres, on pourrait la comparer avec A', et retomber ainsi sur le premier cas examiné plus haut. Donc A_1 déplacera quelqu'une des lettres $b_1, \ldots, b_t$. D'ailleurs elle contiendra dans un même cycle des lettres des deux catégories a et b; car, si elle ne permutait les a d'une part et les b d'autre part qu'avec des lettres nouvelles, on pourrait la joindre à $A, A', A'', \ldots$ pour former un nouveau groupe H' analogue à H, ce qu'on suppose n'être plus possible.

Admettons donc que A_1 contienne dans un même cycle a_σ et b_τ. Nous allons démontrer que H contient une substitution S, semblable à A, et qui déplace à la fois ces deux lettres. En effet, si t n'est pas $> p$, chacune des substitutions $A, A', A'', \ldots$ déplacera tous les b, et celle de ces substitutions qui déplace a_ρ pourra être prise pour S. Si $t > p$, H permute ensemble les lettres $b_1, \ldots, b_t$ d'une manière $t - p + 1$ fois transitive (théorème I), et dérivera évidemment de la combinaison d'une substitution quelconque A', prise parmi celles de la suite $A, A', A'', \ldots$ qui déplacent b_τ, avec le groupe H' formé de celles des substitutions de H qui ne déplacent pas b_τ. Le groupe H permutant transitivement les lettres de la suite $a_1, \ldots, a_s$, le groupe H' contiendra au moins une substitution B qui fait succéder a_σ à l'une des lettres de cette suite que A' déplaçait (si A' déplaçait a_σ, on prendrait pour B la substitution unité), et H contiendra la substitution $S = B^{-1}A'B$, qui déplace a_σ et b_τ.

Cela posé, si A_1 contient un cycle entier de lettres non déplacées par S, on pourra appliquer à ces deux substitutions le raisonnement du n° **32**, sinon on leur appliquera celui du n° **33**. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit* A *une substitution d'ordre premier p et conte-*

nant deux cycles. Tout groupe primitif G, *contenant la substitution* A, *sera symétrique ou alterné dès que son degré dépassera* $\frac{9p}{2} - 1$.

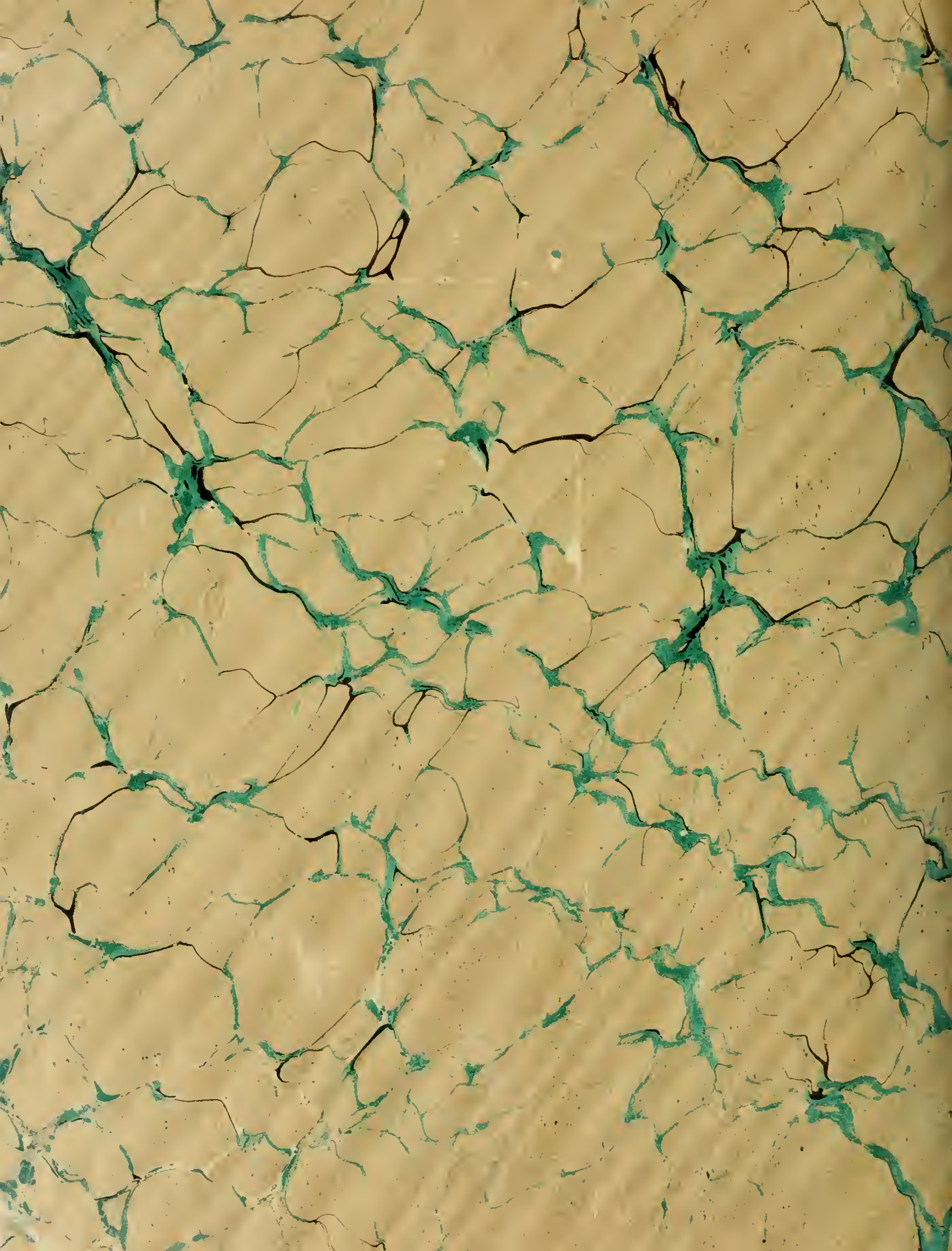
Ce théorème n'est démontré par ce qui précède que si p est impair; mais on vérifiera aisément qu'il est encore exact pour $p = 2$.

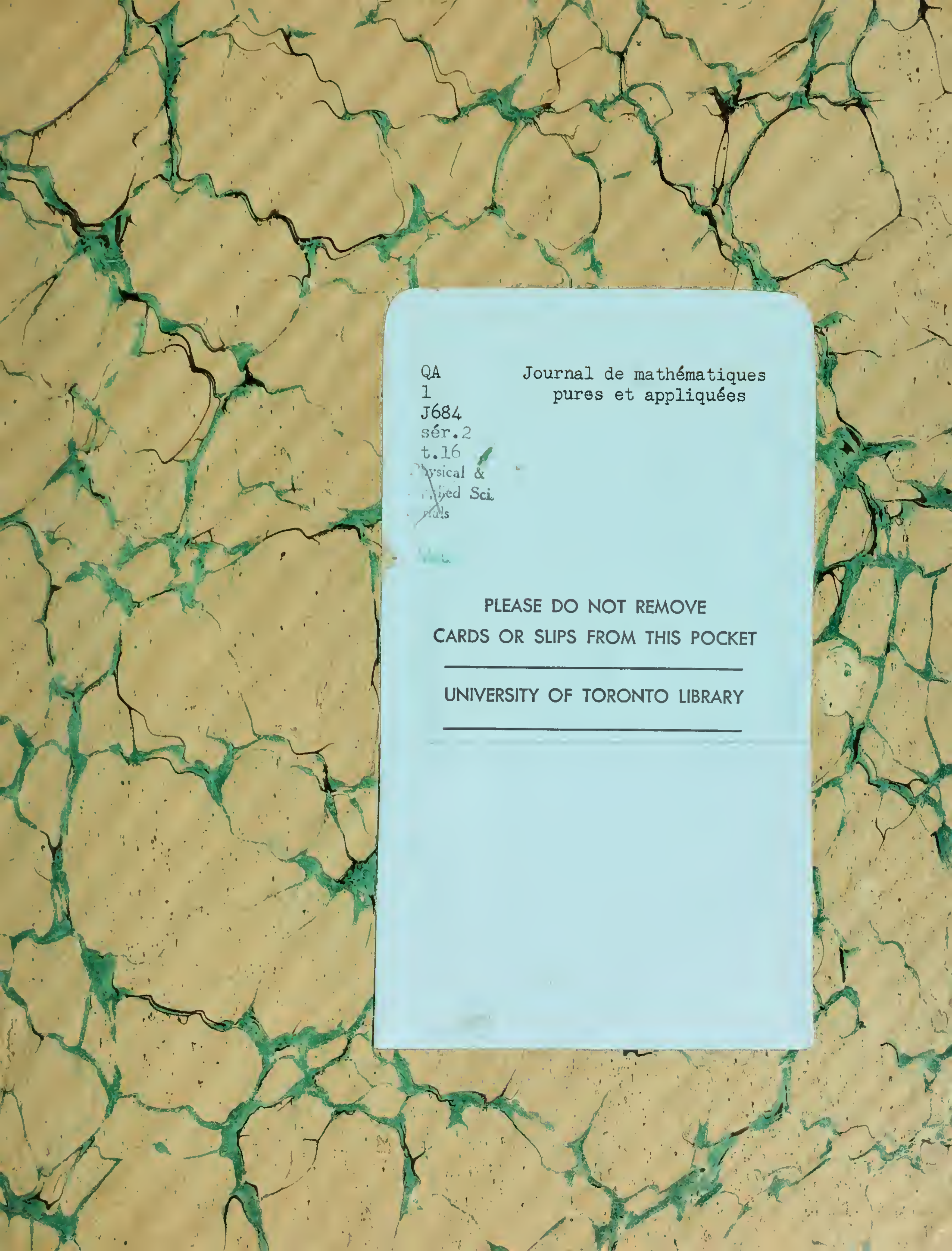
55. Nous conviendrons de dire qu'un groupe de substitutions appartient à la N*ième* classe, si celle de ses substitutions qui déplace le moins de lettres (l'unité exceptée) en déplace précisément N.

Cela posé, les résultats exposés dans ce Mémoire conduisent immédiatement à cette conséquence remarquable, que *chaque classe ne contient qu'un nombre limité de groupes primitifs* (sauf les classes 2 et 3 qui contiennent les groupes symétriques et alternés de tous les degrés).

En effet, les groupes primitifs de la classe N ont leur degré limité (théorème II); et chaque degré ne peut d'ailleurs fournir qu'un nombre limité de groupes.

FIN DU TOME SEIZIÈME (2e SÉRIE).





QA
1
J684
sér.2
t.16
Physical &
Applied Sci.
Serials
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY